D-13 NOV

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

K. Hensel

H. Hasse L. Schlesinger

Wissenschaftlicher Beirat

H. Brandt / M. Dehn / G. Doetsch / A. Fraenkel / O. Haupt / F. Hausdorff
E. Hellinger / G. Kowalewski / H. Rademacher / K. Reidemeister
A. Rosenthal / C. Schaefer / W. Schmeidler / F. Schottky / O. Toeplitz

Band 163

Heft 1

Ausgegeben den 22. Oktober 1930

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

Berlin W 10 und Leipzig

1930

Band 163. Heft 1.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Remak, Robert, Über die Darstellung der endlichen Gruppen als Untergruppen direkter Produkte	1
Tornier, Erhard, Die Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung	45
Bell, E. T., Existence theorems on the numbers of representations of odd integers as sums of $4t+2$ squares	65

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgend einem Grunde Text-Änderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion ausschließlich unter der Adresse:

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik

Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Behringweg 7.

Über die Darstellung der endlichen Gruppen als Untergruppen direkter Produkte.

Von *Robert Remak* in Berlin.

Einleitung.

Als Hilfsmittel der Erforschung der Konstitution der endlichen Gruppen dienen einerseits die Kompositionsreihen und Hauptreihen, bei denen man zwar die Primfaktoren, das sind die Quotienten je zweier aufeinanderfolgender Glieder der Reihe, als einfache Gruppen, bzw. direkte Produkte isomorpher einfacher Gruppen ziemlich gut kennt, die Komposition der Faktoren miteinander aber und die Frage, wann Vertauschung der Reihenfolge möglich ist, wann nicht, nur sehr wenig beherrscht. Das andere Hilfsmittel sind die direkten Produkte. Das Produkt zweier Gruppen heißt bekanntlich ein direktes, wenn sie teilerfremd sind, und jedes Element der einen mit jedem Element der anderen vertauschbar ist. Bei den direkten Produkten beherrscht man bekanntlich die Komposition völlig. Man kann nämlich aus zwei oder mehr willkürlich gegebenen Gruppen durch einfaches Nebeneinanderschreiben der Komponenten stets das direkte Produkt bilden, d. h. eine Gruppe, deren direkte Faktoren den gegebenen Gruppen isomorph [1]) sind. Zerlegt man eine Gruppe auf zweierlei Art in direkte unzerlegbare Faktoren, so sind diese, von der Reihenfolge abgesehen, paarweise einander isomorph [2]). In speziellen Fällen, insbesondere, wenn die Gruppe der invarianten Elemente, „das Zentrum", gleich dem Einheitselement ist, ist die Zerlegung identisch eindeutig, d. h. zwei verschiedene Zerlegungen in direkte unzerlegbare Faktoren liefern, von der Reihenfolge abgesehen, dieselben Faktoren. Es können also zwei Gruppen, deren direkte unzerlegbare Faktoren nicht isomorph übereinstimmen, nicht isomorph sein. Die direkt unzerlegbaren kommutativen Gruppen sind zyklisch von Primzahlpotenzordnung. Man kann sagen, daß man durch diese Sätze die Konstitution der kommutativen oder Abelschen Gruppen völlig beherrscht. Für nicht kommutative Gruppen kann man jedoch aus der direkten Unzerlegbarkeit sehr wenig auf die Konstitution der Gruppen schließen.

Um in der Frage der Gruppenkonstitution weiter zu kommen, soll in folgendem zwischen den Hauptreihen einerseits und der Zerlegung in direkte Faktoren andererseits gleichsam ein Mittelweg eingeschlagen werden. Es soll eine Zerfällung der Gruppen betrachtet werden, bei der die Komposition der Faktoren komplizierter ist als bei den

---

[1]) Ich gebrauche „isormorph", „Isomorphismus" stets im Sinne der eineindeutigen Beziehung.

[2]) Für kommutative Gruppen wurde der Satz bewiesen durch *Frobenius* und *Stickelberger*, Über Gruppen vertauschbarer Elemente, Journ. f. Math. Bd. **86** (1879), S. 217, für allgemeine Gruppen in meiner Dissertation Journ. f. Math. Bd. **139** (1911), S. 293—308, und vereinfacht Bd. **153** (1924), S. 131—140. Siehe auch: *Otto Schmidt*, Sitzungber. d. Physiko-mathemat. Gesellsch. an d. St. Wladimir-Universität in Kiew 1912 u. Bull. de la Soc. Math. de France. Tome XLI (1913), S. 161—161; ferner: *A. Speiser*, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, Berlin 1923, § 36, S. 86—90, oder 2. Aufl. 1927, § 44, S. 133—136.

Übrigens ist für alle endlichen Gruppen der Isomorphismus ein „zentraler", d. h. die isormorphe Zuordnung läßt sich so wählen, daß der Quotient je zweier zugeordneter Elemente dem Zentrum der Gruppe angehört.

direkten Produkten, so daß man sie aber noch beherrschen kann, bei der andererseits die Tatsache der Unzerlegbarkeit der Faktoren bereits gestattet, Schlüsse auf die Konstitution der Faktoren zu ziehen; und zwar soll die Darstellung der endlichen Gruppen als Untergruppen direkter Produkte behandelt werden.

In § 1 soll die Bildung einer beliebigen Untergruppe eines direkten Produktes, abgekürzt „subdirektes Produkt", zweier Faktoren behandelt werden. Die Untergruppe entsteht durch direkte Multiplikation lediglich der zugeordneten Komplexe zweier isomorpher Faktorgruppen, wie bekannt [3]). Solche Gebilde mögen „meromorphe Produkte" heißen. Ebenso sollen die Eigenschaften einer invarianten Untergruppe eines direkten Produktes zweier Faktoren behandelt werden. Hat man mehr als zwei untereinander isomorphe Faktorgruppen, so kann man leicht ein meromorphes Produkt von mehr als zwei Faktoren bilden. Die allgemeine Untergruppe eines direkten Produktes von drei und mehr Faktoren ist aber wesentlich komplizierter gebaut, so daß für drei und mehr Faktoren das meromorphe Produkt ein sehr spezieller Fall des subdirekten Produktes wird, während für zwei Faktoren die beiden Begriffe noch zusammenfallen. Die Eigenschaften eines allgemeinen subdirekten Produktes dreier Faktoren sind bereits recht verwickelt und sollen in einer besonderen Arbeit behandelt werden.

Für das Folgende sind die Sätze des § 2 fundamental. Jede Gruppe, die zwei teilerfremde invariante Untergruppen besitzt (deren Produkt bekanntlich ein direktes ist), ist als subdirektes Produkt zweier Faktoren darstellbar. Jede Gruppe, die n invariante Untergruppen besitzt, deren Durchschnitt das Einheitselement ist, ist als subdirektes Produkt von n Faktoren darstellbar. Jede Gruppe, die n invariante Untergruppen besitzt, deren Produkt ein direktes ist, ist als meromorphes Produkt von n Faktoren darstellbar.

Diese Sätze sollen in § 3 dazu benutzt werden, um allgemein die Darstellung der endlichen Gruppen als subdirekte Produkte nicht weiter zerlegbarer Faktoren zu untersuchen. Es ergibt sich, daß eine Gruppe dann und nur dann subdirekt unzerlegbar ist, wenn sie nur eine einzige minimale invariante Untergruppe besitzt. Eine minimale invariante Untergruppe nenne ich zur Abkürzung „Fuß". Eine Gruppe, die nur einen Fuß besitzt, soll „einfüßig" heißen. Von nun an werden die Ergebnisse der vorangehenden Arbeit „Über minimale invariante Untergruppen in der Theorie der endlichen Gruppen"[3a]), zitiert MIU, ständig benutzt. Das Produkt sämtlicher Füße einer Gruppe war „Sockel" genannt worden. Ist eine Gruppe als subdirektes Produkt von einfüßigen Faktoren dargestellt, und kann an keinen Faktor weglassen, ohne daß die Darstellung aufhört, „bestimmt", d. h. der gegebenen Gruppe eineindeutig isomorph zu sein, so heiße die Zerlegung „ökonomisch". Es ist die Anzahl der Faktoren gleich dem dort definierten „Rang" des Sockels und der Sockel wird durch die subdirekte Zerlegung als direktes Produkt von Füßen dargestellt.

§ 4 handelt von der Konstitution der unzerlegbaren Faktoren. Zunächst wird gezeigt, daß ein Fuß in der ganzen Gruppe und im unzerlegbaren Faktor von der gleichen (I., II., III.) Art ist, so daß man von einfüßigen Faktoren I., II., III. Art sprechen kann. Füße I. Art gehören dem Zentrum der Gruppe an, Füße II. Art sind kommutativ, gehören aber nicht dem Zentrum der Gruppe an, Füße III. Art sind nicht kommutativ. Die bestimmtesten Aussagen lassen sich über die Faktoren III. Art machen. Sie sind Automorphismengruppen des Fußes, deren Konstitution in MIU § 6 eingehend behandelt worden ist. Ist ein Fuß III. Art gegeben, so ist durch ihn bereits die Ordnung seines

[3]) Siehe *Klein-Fricke*, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen Bd. 1, Leipzig 1890, S. 402—406. Die Beweise mögen hier in der neueren Bezeichnungsweise wiedergegeben werden.

[3a]) Journ. f. Math. Bd. **162** (1930), S. 1—16.

einfüßigen Faktors beschränkt. Eine analoge Beschränkung besteht nicht für Faktoren I. und II. Art. Ein kommutativer einfüßiger Faktor ist zyklisch von Primzahlpotenzordnung. Ein einfüßiger Faktor I. Art besitzt ein Zentrum, das zyklisch von Primzahlpotenzordnung ist.

In § 5 wird die Zentrenreihe einer Gruppe behandelt, die dadurch entsteht, daß fortgesetzt die Faktorgruppe nach dem Zentrum gebildet wird. Das letzte Glied der entstehenden Reihe von invarianten Untergruppen nenne ich das „Hyperzentrum" der Gruppe. Nach einem Satz des Herrn *Burnside* [4]) ist eine Gruppe, die gleich ihrem Hyperzentrum ist, das direkte Produkt von Faktoren von Primzahlpotenzordnung. Unter Benutzung des Burnsideschen Satzes, den ich hier nicht von neuem beweise, werde ich dasselbe von dem Hyperzentrum einer jeden endlichen Gruppe nachweisen. Als Anwendung dieser Sätze werden Aussagen über die Konstitution der Faktoren I. und II. Art gemacht. Insbesondere besitzt ein einfüßiger Faktor I. Art auch ein Hyperzentrum von Primzahlpotenzordnung.

§ 6 behandelt Eindeutigkeitsfragen. Von einer isomorphen Eindeutigkeit der Zerlegung in subdirekte unzerlegbare Faktoren ist im allgemeinen keine Rede. Das erkennt man bereits am Beispiel der kommutativen Gruppen. Diese besitzen außer den direkten Zerlegungen in unzerlegbare Faktoren im allgemeinen weitere subdirekte Zerlegungen. Es interessieren daher die speziellen Fälle, in denen die Zerlegung eindeutig ist. Da ein subdirekter Faktor nicht unmittelbar in der gegebenen Gruppe vorkommt, sondern eine der Darstellung der Gruppe dienende abstrakte Neuschöpfung ist, so hat die Aussage, daß zwei Faktoren zweier verschiedener subdirekter Zerlegungen miteinander identisch sind, zunächst keinen Sinn. Wir wollen zwei subdirekte Faktoren aus derselben oder aus zwei verschiedenen Zerlegungen miteinander „subidentisch" nennen, wenn sie isomorph sind und jedes Element der Gruppe in bezug auf beide Faktoren einander isomorph zugeordnete Komponenten hat. Hierzu ist notwendig und hinreichend, daß die invariante Untergruppe derjenigen Elemente, die die Komponente $\hat{E}$ erhalten (die „erzeugende" invariante Untergruppe des § 2), für beide Faktoren dieselbe ist. Die Bezeichnung „subidentisch" ist gewählt, weil für direkte Faktoren die Subidentität von der Identität verschieden ist und keine aus der andern zu folgen braucht. Die erzeugende invariante Untergruppe eines einfüßigen subdirekten Faktors III. Art ist die Untergruppe derjenigen Elemente, die mit allen Elementen des Fußes vertauschbar sind. Da in einer ökonomischen Zerlegung in unzerlegbare subdirekte Faktoren alle Füße III. Art als Füße von subdirekten Faktoren vorkommen, so stehen alle einfüßigen subdirekten Faktoren III. Art subidentisch eindeutig fest. Sind alle Füße einer Gruppe von III. Art, so gibt es, von der Reihenfolge abgesehen, nur eine einzige ökonomische Zerlegung in unzerlegbare subdirekte Faktoren. Bezeichnet $\mathfrak{S}$ den Sockel einer Gruppe $\mathfrak{G}$, ferner $\mathfrak{M}$ die invariante Untergruppe derjenigen Elemente, die mit allen Elementen von $\mathfrak{S}$ vertauschbar sind, so ist $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{M}}$ isomorph der Gruppe der Automorphismen, die $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{G}$ erleidet. Die Zerlegung von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{M}}$ ist für alle ökonomischen subdirekten Zerlegungen in unzerlegbare Faktoren dieselbe.

In einer folgenden Arbeit sollen diejenigen invarianten Untergruppen, die als Erzeugende in ökonomischen Zerlegungen auftreten können, eingehend untersucht werden. Der Begriff der ökonomischen Zerlegung wird verallgemeinert. Dabei werden sich weitere Eindeutigkeitssätze ergeben.

---

[4]) *W. Burnside*, The Theory of Groups of Finite Order, 2.ed. Cambridge 1911, S. 166—167. Einen einfacheren Beweis habe ich geliefert Journ. f. Math. Bd. **142** (1913), S. 54—56.

§ 1. Über Untergruppen eines direkten Produktes von zwei Faktoren.

Es bezeichnen deutsche Buchstaben Gruppen, lateinische Buchstaben Elemente, $\mathfrak{B} < \mathfrak{A}$ bedeutet, $\mathfrak{B}$ ist Untergruppe von $\mathfrak{A}$; $B < \mathfrak{B}$ bedeutet, B ist Element von $\mathfrak{B}$. $<_i$ bedeutet: „ist invariante Untergruppe von“ [5]). $\times$ ist zwischen Gruppen das Zeichen der direkten Multiplikation, zwischen Elementen das Zeichen der eindeutigen Komponentenzerlegung nach einem direkten Produkte. $\sim$ ist zwischen Gruppen das Zeichen des eineindeutigen Isomorphismus, zwischen Elementen das Zeichen der eineindeutigen isomorphen Zuordnung durch einen gegebenen Isomorphismus. $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ bedeute den Durchschnitt der Untergruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ einer Gruppe, ebenso für mehr als zwei Untergruppen.

Hilfssatz 1a: *Es sei*

$$\overline{\mathfrak{G}} <_i \mathfrak{G} < \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2.$$

Die Komponenten von $\mathfrak{G}$ *und* $\overline{\mathfrak{G}}$ *seien bezw.*

$$\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \overline{\mathfrak{B}}_1, \overline{\mathfrak{B}}_2.$$

Behauptung: *Es ist* $\overline{\mathfrak{B}}_1 <_i \mathfrak{B}_1$, $\overline{\mathfrak{B}}_2 <_i \mathfrak{B}_2$.

Beweis: Es sei $G < \mathfrak{G}$, $\overline{G} < \overline{\mathfrak{G}}$;
die Komponentenzerlegungen seien

$$G = B_1 \times B_2, \quad \overline{G} = \overline{B}_1 \times \overline{B}_2.$$

Es ist

$$\overline{G}' = G\,\overline{G}\,G^{-1} < \overline{\mathfrak{G}} \text{ oder } \overline{G}' = B_1\,\overline{B}_1\,B_1^{-1} \times B_2\,\overline{B}_2\,B_2^{-1} < \overline{\mathfrak{G}},$$

mithin

$$B_1\,\overline{B}_1\,B_1^{-1} < \overline{\mathfrak{B}}_1, \quad B_2\,\overline{B}_2\,B_2^{-1} < \overline{\mathfrak{B}}_2.$$

Da B_1 und B_2 sämtliche Elemente von $\mathfrak{B}_1$ bzw. $\mathfrak{B}_2$ durchlaufen, so ist

$$\overline{\mathfrak{B}}_1 <_i \mathfrak{B}_1, \quad \overline{\mathfrak{B}}_2 <_i \mathfrak{B}_2.$$

Satz 1 (von Klein-Fricke) [6]): *Es sei* $\mathfrak{G} < \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_1$ *die* $\mathfrak{A}_1$*-Komponente von* $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{B}_2$ *die* $\mathfrak{A}_2$*-Komponente von* $\mathfrak{G}$,

$$\mathfrak{C}_1 = (\mathfrak{G}, \mathfrak{A}_1), \quad \mathfrak{C}_2 = (\mathfrak{G}, \mathfrak{A}_2).$$

Behauptung:

$$\mathfrak{C}_1 <_i \mathfrak{B}_1, \quad \mathfrak{C}_2 <_i \mathfrak{B}_2,$$

$$\frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{C}_1} \sim \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{C}_2}.$$

$\mathfrak{G}$ *entsteht durch direkte Multiplikation von Komplexen, die durch diesen wohlbestimmten Isomorphismus einander zugeordnet sind.*

Beweis: Es sei $C_1 < \mathfrak{C}_1$; da

$$C_1 = C_1 \times E$$

die eindeutige Komponentenzerlegung von C_1 ist, so ist $C_1 < \mathfrak{B}_1$, also $\mathfrak{C}_1 < \mathfrak{B}_1$, ebenso $\mathfrak{C}_2 < \mathfrak{B}_2$. Es sei $G < \mathfrak{G}$; $G = B_1 \times B_2$ sei die eindeutige Komponentenzerlegung von G. Es ist

$$G\,C_1\,G^{-1} = B_1\,C_1\,B_1^{-1} \times B_2\,E\,B_2^{-1}$$
$$= B_1\,C_1\,B_1^{-1} \times E = C_1' \times E < \mathfrak{A}_1.$$

---

[5]) Das Zeichen $<_i$ ist nicht transitiv; aus $\mathfrak{C} <_i \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B} <_i \mathfrak{A}$ folgt nicht $\mathfrak{C} <_i \mathfrak{A}$. Wohl aber folgt aus $\mathfrak{C} < \mathfrak{B} < \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C} <_i \mathfrak{A}$ die Beziehung $\mathfrak{C} <_i \mathfrak{B}$, die ich als selbstverständlich meist nicht hinschreibe.

[6]) Siehe l. c. Anm. 3.

Da außerdem

$$G\,C_1\,G^{-1} < \mathfrak{G};$$

so ist

$$C_1' = G\,C_1\,G^{-1} < (\mathfrak{G}\,,\,\mathfrak{A}_1) = \mathfrak{C}_1.$$

Es ist mithin $\mathfrak{C}_1 <_i \mathfrak{G}$, also nach Hilfssatz 1 a auch $\mathfrak{C}_1 <_i \mathfrak{B}_1$. Ebenso wird gezeigt, daß $\mathfrak{C}_2 <_i \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{C}_2 <_i \mathfrak{B}_2$. Ordnet man jedes Element von $\mathfrak{G}$ seiner $\mathfrak{A}_2$-Komponente zu, so ist $\mathfrak{G}$ seiner Komponentengruppe $\mathfrak{B}_2$ mehrstufig isomorph. Hierbei werden sämtliche Elemente mit der $\mathfrak{A}_2$-Komponente E dem Einheitselement zugeordnet. Das sind aber die Elemente von $\mathfrak{C}_1$. Es ist also

$$\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{C}_1} \sim \mathfrak{B}_2, \text{ entsprechend } \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{C}_2} \sim \mathfrak{B}_1.$$

Bekanntlich darf man, wenn

$$\mathfrak{K} <_i \mathfrak{L}, \quad \mathfrak{K} <_i \mathfrak{M}, \quad \mathfrak{L} <_i \mathfrak{M},$$

in der Faktorengruppe $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{L}}$ die Komplexe nach den kleineren Komplexen von $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{K}}$ zusammenfassen. Man darf also schreiben:

$$\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{L}} \sim \frac{\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{K}}\right)}{\left(\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{K}}\right)}.$$

Das wende man auf die Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2}$ an. Es ist also

$$\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2} \sim \frac{\left(\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{C}_1}\right)}{\left(\frac{\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2}{\mathfrak{C}_1}\right)}.$$

Auf Grund des vorigen Isomorphismus darf man für die Komplexe nach $\mathfrak{C}_1$ die $\mathfrak{A}_2$-Komponenten setzen und erhält

$$\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2} \sim \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{C}_2}.$$

Ebenso zeigt man aber

$$\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2} \sim \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{C}_1},$$

mithin

$$\frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{C}_1} \sim \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{C}_2}.$$

Ist B_2 die $\mathfrak{A}_2$-Komponente eines Elementes $G < \mathfrak{G}$, so liefert $G\,\mathfrak{C}_1$ sämtliche Elemente mit derselben $\mathfrak{A}_2$-Komponente B_2. Sämtliche Elemente des Komplexes $B_2\,\mathfrak{C}_2$ sind zunächst Komponenten der Elemente $G\,\mathfrak{C}_2$; also liefert $G\,\mathfrak{C}_1 \cdot \mathfrak{C}_2 = G(\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2)$ sämtliche Elemente, deren $\mathfrak{A}_2$-Komponenten zu $B_2\,\mathfrak{C}_2$ gehören. Jeder Komplex von $\frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{C}_2}$ liefert also die $\mathfrak{A}_2$-Komponenten eines wohlbestimmten Komplexes von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2}$, dessen $\mathfrak{A}_1$-Komponenten ebenso ein wohlbestimmter Komplex von

$\frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{C}_1}$ liefert. $\mathfrak{G}$ entsteht also dadurch, daß die Elemente von Komplexen von $\frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{C}_1}$ einerseits und $\frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{C}_2}$ andrerseits miteinander multipliziert werden, die durch diesen wohlbestimmten Isomorphismus einander zugeordnet sind. Wir wollen diese Bildung ein „meromorphes Produkt" nennen, da zwischen $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ eine mehrmehrdeutige Zuordnung oder ein Meromorphismus besteht, und dafür das Zeichen einführen

$$\mathfrak{G} = \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{C}_1} \times\!\!\!\sim \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{C}_2}.$$

Zu beachten ist, daß dies Zeichen *keine* Faktorgruppe bedeutet.

Korollar 1 a zu Satz 1: *Es ist*

$$\text{Ord } \mathfrak{G} = \text{Ord } \mathfrak{C}_1 \cdot \text{Ord } \mathfrak{C}_2 \cdot \text{Ord } \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{C}_1} = \text{Ord } \mathfrak{B}_1 \cdot \text{Ord } \mathfrak{C}_2 = \text{Ord } \mathfrak{B}_2 \cdot \text{Ord } \mathfrak{C}_1.$$

Korollar 1 zu Satz 1: *Es ist*

$$\mathfrak{G}\,\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{A}_2,$$
$$(\mathfrak{G}\,\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_1) = (\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_1) = \mathfrak{B}_1,$$

ebenso

$$\mathfrak{B}_2 = (\mathfrak{G}\,\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2);$$

entsprechend könnte man schreiben

$$\mathfrak{G} = \frac{(\mathfrak{G}\,\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_1)}{(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}_1)} \times\!\!\!\sim \frac{(\mathfrak{G}\,\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)}{(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}_2)};$$

wegen $\mathfrak{G} < \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2$ *ist auch*

$$\mathfrak{G}\,\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{G}\,\mathfrak{B}_1.$$

Korollar 2 zu Satz 1: *Spezielle Fälle*: Wenn $\mathfrak{C}_2 = \mathfrak{E}$, so ist

$$\mathfrak{G} = \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{C}_1} \times\!\!\!\sim \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{E}};$$

es ist also

$$\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{E}} = \mathfrak{G} \sim \mathfrak{B}_1, \quad \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{E}} = \mathfrak{B}_2 \sim \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{C}_1}.$$

Die Gruppe $\mathfrak{G}$ ist ihrer $\mathfrak{A}_1$-Komponente isomorph. Zu jeder $\mathfrak{A}_1$-Komponente gehört nur eine $\mathfrak{A}_2$-Komponente. $\mathfrak{B}_2$ ist isomorph der Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{C}_1}$. Jeder Komplex dieser Faktorgruppe wird mit einem wohlbestimmten Elemente von $\mathfrak{B}_2$ multipliziert.

Wenn

$$\mathfrak{G} = \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{E}} \times\!\!\!\sim \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{E}},$$

so ist $\mathfrak{B}_1 \sim \mathfrak{B}_2 \sim \mathfrak{G}$. Jede Komponente aus $\mathfrak{B}_1$ kommt mit einer und nur einer Komponente aus $\mathfrak{B}_2$ multipliziert vor und umgekehrt.

Korollar 3 zu Satz 1: Es sei

$$\mathfrak{A}_1 < \mathfrak{G} < \mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_2;$$

dann ist $\mathfrak{C}_1 = (\mathfrak{G}, \mathfrak{A}_1) = \mathfrak{A}_1$, mithin $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{A}_1$; also

$$\frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{C}_1} \sim \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{C}_2} \sim \mathfrak{E},$$

$$\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{C}_2 = (\mathfrak{G}, \mathfrak{A}_2),$$
$$\mathfrak{G} = \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2 = \mathfrak{A}_1 \times (\mathfrak{G}, \mathfrak{A}_2).$$

Diese Formel läßt sich auch direkt beweisen [7]).

Korollar 4 zu Satz 1: Es seien die Ordnungen von $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ teilerfremd; dann teilt $\operatorname{Ord}\frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{C}_1} = \operatorname{Ord}\frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{C}_2}$ sowohl $\operatorname{Ord}\mathfrak{A}_1$ wie $\operatorname{Ord}\mathfrak{A}_2$, also ist

$$\operatorname{Ord}\frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{C}_1} = \operatorname{Ord}\frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{C}_1} = 1,$$

mithin

$$\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{C}_1, \quad \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{C}_2, \quad \mathfrak{G} = \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2.$$

Es ist also bewiesen: *Sind die Ordnungen zweier direkter Faktoren teilerfremd, so ist jede Untergruppe ihres direkten Produktes das direkte Produkt zweier Untergruppen der beiden Faktoren.*

Korollar 5 zu Satz 1: Durch Induktion läßt sich hieraus sofort der analoge Satz für n Faktoren beweisen:

Ist

$$\mathfrak{G} < \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \cdots \times \mathfrak{A}_n$$

und sind die Ordnungen von $\mathfrak{A}_1$ *bis* $\mathfrak{A}_n$ *zu je zweien zueinander teilerfremd, so ist*

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2 \times \cdots \mathfrak{B}_n,$$

wo $\mathfrak{B}_\nu < \mathfrak{A}_\nu$ *für* $\nu = 1, 2, \ldots, n$.

Wir wollen eine Untergruppe eines direkten Produktes, die das direkte Produkt von Untergruppen der Faktoren ist, eine „Plenaruntergruppe“ des direkten Produktes nennen. Eine Untergruppe ist plenar in bezug auf ein bestimmtes direktes Produkt. Das bewiesene Korollar lautet jetzt:

Sind die Ordnungen der Faktoren eines direkten Produktes zu je zweien zueinander teilerfremd, so sind sämtliche Untergruppen des direkten Produktes Plenaruntergruppen.

Die durch Satz 1 gegebene Darstellung der Untergruppen eines direkten Produktes soll im folgenden graphisch veranschaulicht werden.

Man schreibe jedes Element in ein Quadrat. Mit dem Einheitselement beginnend setze man die Elemente von $\mathfrak{A}_1$ in die erste Zeile eines Schemas, die Elemente von $\mathfrak{A}_2$ in die erste Spalte; die Elemente des direkten Produktes $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ erfüllen ein Rechteck, derart, daß die Elemente einer Spalte die gleiche $\mathfrak{A}_1$-Komponente, einer Zeile die gleiche $\mathfrak{A}_2$-Komponente besitzen. Man ordne die Elemente so, daß in $\mathfrak{A}_1$ die Elemente von $\mathfrak{B}_1$, hierin wieder die Elemente von $\mathfrak{C}_1$ voranstehen. Die Elemente von $\mathfrak{B}_1$ seien nach den Komplexen der Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{C}_1}$ geordnet. Das gleiche gelte entsprechend für die Elemente von $\mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{C}_2$. Ferner sei die Reihenfolge der Komplexe von $\frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{C}_1}$ und $\frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{C}_2}$ so gewählt, daß die Komplexe der Reihe nach durch den Isomorphismus $\frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{C}_1} \sim \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{C}_2}$ einander entsprechen. Dann besteht die Untergruppe $\mathfrak{G}$ aus einer Reihe von Rechtecken, die, mit dem Rechteck $\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2$ beginnend, sich in der Hauptdiagonale durch das Rechteck $\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2$ hindurchziehen.

---

[7]) Siehe z. B. M I U Hilfssatz 3.

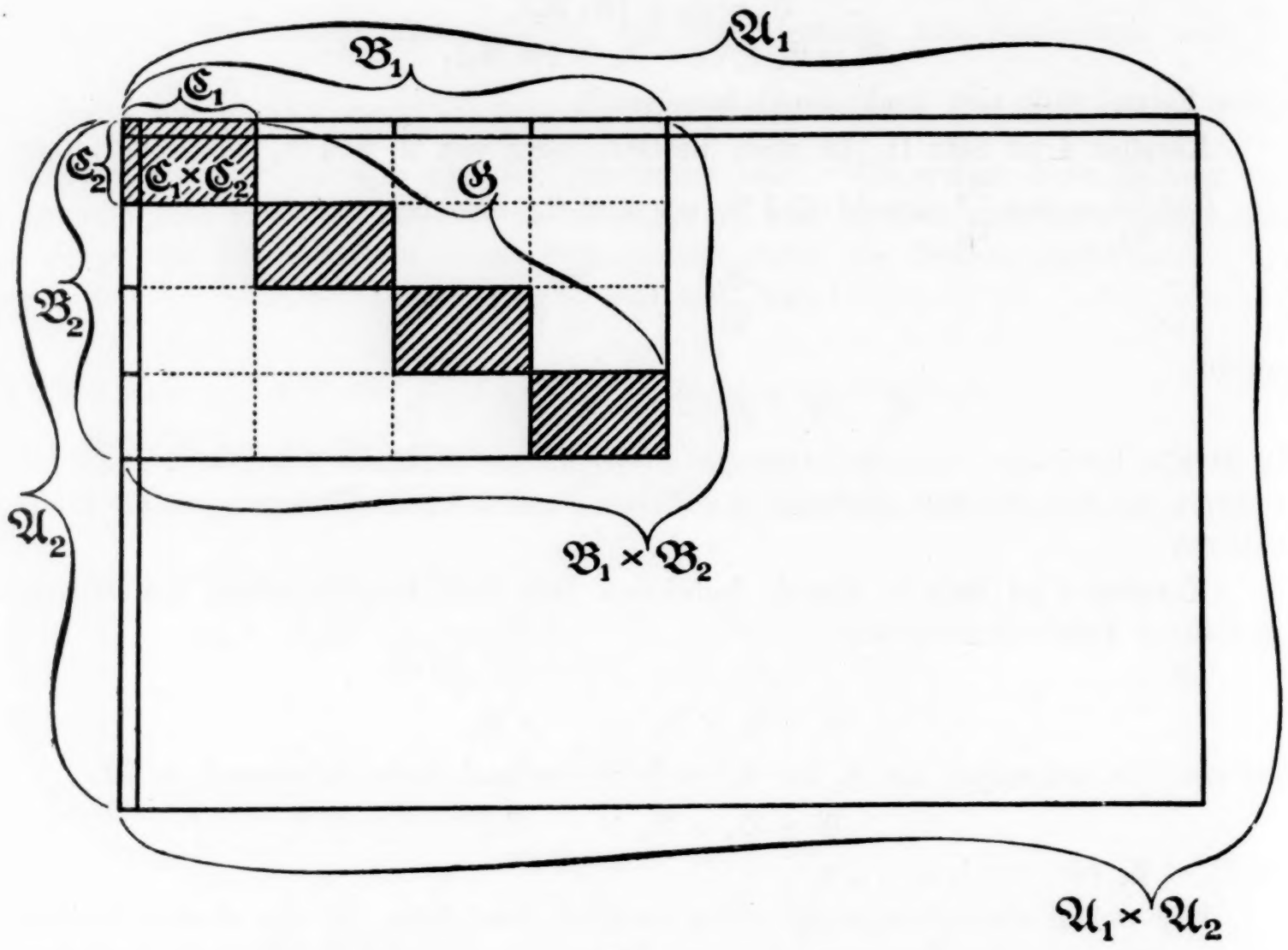

Fig. 1.

Das Produkt $\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2$ möge auch der „Block" des meromorphen Produktes genannt werden, die Gruppen $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ die „Blockkomponenten" von $\mathfrak{G}$. Die $\mathfrak{A}_1$-Blockkomponente ist gleich dem Durchschnitt $(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}_1)$. Die Blockkomponenten unter den Elementen sind also diejenigen Komponenten, die selbständig als Elemente von $\mathfrak{G}$ auftreten, so daß die andere Komponente gleich E ist.

Analog wie bei zwei Faktoren läßt sich ein direktes Produkt von n Faktoren durch ein Quader im n-dimensionalen Raum darstellen. Die Untergruppe des direkten Produktes, abgekürzt das „subdirekte Produkt", erfüllt eine gewisse Teilfigur des Quaders. Es sei

$$\mathfrak{G} < \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \cdots \times \mathfrak{A}_n,$$

die Komponenten seien $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_n$. Sie mögen auch die „subdirekten Faktoren" heißen. Der Durchschnitt $(\mathfrak{G}, \mathfrak{B}_\nu) = \mathfrak{C}_\nu$ heiße die $\mathfrak{A}_\nu$-Blockkomponente von $\mathfrak{G}$. Eine Blockkomponente ist eine als Element auftretende Komponente, derart, daß die übrigen Komponenten gleich E sind. Das Produkt

$$\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2 \times \cdots \times \mathfrak{C}_n = \mathfrak{C}^\times.$$

heiße der Block. Plenaruntergruppen des direkten Produktes

$$\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \cdots \times \mathfrak{A}_n$$

lassen sich bei passender Anordnung der Elemente der Faktoren ebenfalls durch Quader darstellen. Der Block ist die größte in $\mathfrak{G}$ enthaltene Plenaruntergruppe des direkten Produktes. Faßt man die zu $\mathfrak{A}_\nu$ komplementären direkten Faktoren zu einem Faktor zusammen, so ist $\mathfrak{C}_\nu$ auch Blockkomponente dieses subdirekten Produktes zweier Fak-

toren. Also ist nach Satz 1 $\mathfrak{C}_\nu <_i \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{C}_\nu <_i \mathfrak{B}_\nu$ für $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Ordnet man $\mathfrak{B}_\nu$ nach Komplexen nach $\mathfrak{C}_\nu$, so zerfällt das direkte Produkt $\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2 \times \cdots \times \mathfrak{B}_n$, daß der „Schrein" von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \cdots \times \mathfrak{A}_n$ heißen möge, in der n-dimensionalen Darstellung in dem Block kongruente Quader, und die Darstellung von $\mathfrak{G}$ besteht aus einem Teile dieser Quader. Besteht sie speziell aus zum Block kongruenten Quadern, die längs der Hauptraumdiagonale des Quaders des „Schreines" aneinandergereiht sind, so ist

$$\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{C}^\times} \sim \frac{\mathfrak{B}_\nu}{\mathfrak{C}_\nu} \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, \ldots, n;$$

in diesem Falle wollen wir $\mathfrak{G}$ ein meromorphes Produkt von n Faktoren nennen und schreiben:

$$\mathfrak{G} = \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{C}_1} \times \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{C}_2} \times \cdots \times \frac{\mathfrak{B}_n}{\mathfrak{C}_n}.$$

Wenn umgekehrt ein direktes Produkt gegeben, $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \cdots \times \mathfrak{A}_n$, wenn $\mathfrak{C}_\nu <_i \mathfrak{B}_\nu < \mathfrak{A}_\nu$ und

$$\frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{C}_1} \sim \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{C}_2} \sim \cdots \sim \frac{\mathfrak{B}_\nu}{\mathfrak{C}_\nu},$$

so kann man durch Multiplikation der Elemente von je n einander eineindeutig zugeordneten Komplexen das meromorphe Produkt

$$\frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{C}_1} \times \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{C}_2} \times \cdots \times \frac{\mathfrak{B}_\nu}{\mathfrak{C}_\nu}$$

bilden, und dieses ist stets eine Gruppe. Der Beweis stimmt genau überein mit dem folgenden Beweise der Umkehrung des Satzes 1.

Während für $n = 2$ jedes subdirekte Produkt ein meromorphes ist, ist für $n \geqq 3$ das meromorphe Produkt ein sehr spezieller Fall des subdirekten Produktes.

Umkehrung zu Satz 1 (von Klein-Fricke) [8]: *Wenn*

$$\mathfrak{C}_1 <_i \mathfrak{B}_1 < \mathfrak{A}_1,$$
$$\mathfrak{C}_2 <_i \mathfrak{B}_2 < \mathfrak{A}_2$$

und

$$\frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{C}_1} \sim \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{C}_2}$$

ein wohlbestimmter Isomorphismus zwischen den Faktorgruppen ist, so ist das meromorphe Produkt

$$\mathfrak{G} = \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{C}_1} \times \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{C}_2}$$

eine Untergruppe von $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$.

Beweis: Es braucht nur die Gruppeneigenschaft von $\mathfrak{G}$ bewiesen zu werden. Es sei

$$G < \mathfrak{G}, \quad G' < \mathfrak{G};$$

dann ist zu zeigen, daß $GG' < \mathfrak{G}$. Es seien die Komponentenzerlegungen

$$G = B_1 \times B_2, \quad G' = B_1' \times B_2',$$

also

$$GG' = B_1 B_1' \times B_2 B_2'.$$

---

[8]) Siehe l. c. Anm. 3.

Um zu zeigen, daß $GG' < \mathfrak{G}$, ist notwendig und hinreichend, zu zeigen, daß $B_1 B_1'$ und $B_2 B_2'$ Komplexen nach $\mathfrak{C}_1$ bzw. $\mathfrak{C}_2$ angehören, die durch den Isomorphismus der Faktorgruppen einander zugeordnet sind. Es ist

$$B_1 \mathfrak{C}_1 \sim B_2 \mathfrak{C}_2,$$
$$B_1' \mathfrak{C}_1 \sim B_2' \mathfrak{C}_2,$$

also nach der Definition des Isomorphismus

$$B_1 \mathfrak{C}_1 \cdot B_1' \mathfrak{C}_1 \sim B_2 \mathfrak{C}_2 \cdot B_2' \mathfrak{C}_2$$

oder

$$B_1 B_1' \cdot \mathfrak{C}_1 \sim B_2 B_2' \cdot \mathfrak{C}_2.$$

Also gehören $B_1 B_1'$ und $B_2 B_2'$ einander zugeordneten Komplexen an; ihr Produkt kommt mithin in $\mathfrak{G}$ vor. D. h. es ist $GG' < \mathfrak{G}$, also hat $\mathfrak{G}$ die Gruppeneigenschaft, was zu beweisen war.

Satz 2: *Wenn*

$$\mathfrak{G} <^i \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2,$$

so kommen zu den Aussagen des Satzes 1 *die folgenden hinzu:*

$$\mathfrak{B}_1 <^i \mathfrak{A}_1, \quad \mathfrak{C}_1 <^i \mathfrak{A}_1, \quad \mathfrak{B}_2 <^i \mathfrak{A}_2, \quad \mathfrak{C}_2 <^i \mathfrak{A}_2,$$
$$\frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{C}_1} < \mathfrak{z}\left(\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{C}_1}\right), \quad \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{C}_2} < \mathfrak{z}\left(\frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{C}_2}\right).$$

Hierin bedeute $\mathfrak{z}(\mathfrak{U})$ das Zentrum der Gruppe $\mathfrak{U}$ (die invariante Untergruppe der invarianten, d. h. mit allen Elementen der Gruppe vertauschbaren Elemente).

Beweis: Da

$$\mathfrak{G} <^i \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2, \quad \mathfrak{A}_1 <^i \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2,$$

so ist

$$\mathfrak{C}_1 = (\mathfrak{G}, \mathfrak{A}_1) <^i \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2,$$

mithin

$$\mathfrak{C}_1 <^i \mathfrak{A}_1, \text{ ebenso } \mathfrak{C}_2 <^i \mathfrak{A}_2.$$

Es ist

$$\mathfrak{B}_1 <^i \mathfrak{A}_1, \quad \mathfrak{B}_2 <^i \mathfrak{A}_2$$

nach Hilfssatz 1 a. Es darf durch Transformation von $\mathfrak{G}$ mit einem Elemente von $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ die Zuordnung der Komplexe von $\frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{C}_1}$ und $\frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{C}_2}$ nicht zerstört werden. Dies Prinzip wird wiederholt angewandt und möge das „Prinzip der unzerstörbaren Zuordnung“ heißen [9]). Es sei

$$A_1 < \mathfrak{A}_1, \quad G = B_1 \times B_2 < \mathfrak{G};$$

dann ist $A_1 G A_1^{-1} < \mathfrak{G}$, oder ausführlicher

$$A_1 B_1 A_1^{-1} \times B_2 < \mathfrak{G}.$$

Es gehört $A_1 B_1 A_1^{-1} \times B_2$ einem wohlbestimmten Komplex der Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2}$ an. Dieser läßt sich schreiben:

$$A_1 B_1 A_1^{-1} \cdot \mathfrak{C}_1 \times B_2 \mathfrak{C}_2 = A_1 \mathfrak{C}_1 \cdot B_1 \mathfrak{C}_1 \cdot A_1^{-1} \mathfrak{C}_1 \times B_2 \mathfrak{C}_2.$$

---

[9]) Siehe MIU § 2.

Da aber auch der Komplex

$$B_1\mathfrak{C}_1 \times B_2\mathfrak{C}_2 < \mathfrak{G},$$

und $B_2\mathfrak{C}_2$ nur einem einzigen Komplex von $\frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{C}_1}$ zugeordnet sein kann, so ist

$$A_1\mathfrak{C}_1 \cdot B_1\mathfrak{C}_1 \cdot A_1^{-1}\mathfrak{C}_1 = B_1\mathfrak{C}_1$$

oder

$$A_1\mathfrak{C}_1 \cdot B_1\mathfrak{C}_1 = B_1\mathfrak{C}_1 \cdot A_1\mathfrak{C}_1;$$

d. h. es ist $B_1\mathfrak{C}_1$ vertauschbar mit sämtlichen Komplexen $A_1\mathfrak{C}_1$; mithin

$$\frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{C}_1} < \mathfrak{z}\left(\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{C}_1}\right),$$

ebenso

$$\frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{C}_2} < \mathfrak{z}\left(\frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{C}_2}\right),$$

was zu beweisen war.

Korollar 1 zu Satz 2: *Wenn* $\mathfrak{G} <^i \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$, *so ist* $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2}$ *stets kommutativ.*

Korollar 2 zu Satz 2: *Wenn*

$$\mathfrak{C}_1 <^i \mathfrak{A}_1; \quad \mathfrak{C}_2 <^i \mathfrak{A}_2,$$

so ist

$$\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2 <^i \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2.$$

Beweis: Die Bedingung des Satzes 2 ist erfüllt, da

$$\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{C}_1, \quad \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{C}_2,$$

und $\frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{C}_1} \sim \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{C}_2}$ die Einheit der Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{C}_1}$ bzw. $\frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{C}_2}$ ist.

Korollar 3 zu Satz 2: *Wenn* $\mathfrak{C}_1 <^i \mathfrak{A}_1$, *so ist* $\mathfrak{C}_1 <^i \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$.

Beweis: Es ist dies ein spezieller Fall des Korollars 2 zu Satz 2 für $\mathfrak{C}_2 = \mathfrak{E}$.

Umkehrung zu Satz 2: *Wenn*

$$(1)\ \begin{cases} \mathfrak{C}_1 <^i \mathfrak{A}_1, \\ \mathfrak{C}_2 <^i \mathfrak{A}_2, \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} \mathfrak{C}_1 < \mathfrak{B}_1, \\ \mathfrak{C}_2 < \mathfrak{B}_2, \end{cases} \qquad (3)\ \begin{cases} \mathfrak{B}_1 <^i \mathfrak{A}_1, \\ \mathfrak{B}_2 <^i \mathfrak{A}_2, \end{cases}$$

wenn ferner

$$(4)\ \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{C}_1} < \mathfrak{z}\left(\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{C}_1}\right), \qquad (5)\ \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{C}_2} < \mathfrak{z}\left(\frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{C}_2}\right),$$

und wenn

$$(6)\ \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{C}_1} \sim \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{C}_2},$$

so ist

$$\mathfrak{G} = \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{C}_1} \times\!\!\!\!\sim \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{C}_2} <^i \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2.$$

Beweis: Daß $\mathfrak{G}$ die Gruppeneigenschaft besitzt, folgt bereits aus der Umkehrung zu Satz 1. Es bleibt zu zeigen, daß $\mathfrak{G}$ invariante Untergruppe von $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ ist. Es sei

$$G = B_1 \times B_2 < \mathfrak{G}$$
$$A = A_1 \times A_2 < \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2.$$

Es ist zu zeigen, daß

$$G' = AGA^{-1} < \mathfrak{G}.$$

Es ist

$$G' = AGA^{-1} = A_1 B_1 A_1^{-1} \times A_2 B_2 A_2^{-1} = B_1' \times B_2'.$$

Es ist zu zeigen, daß die Komponenten B_1' und B_2' in einander zugeordneten Komplexen des Isomorphismus (6) vorkommen. Nun ist aber wegen (4) und (5)

$$A_1\mathfrak{C}_1 \cdot B_1\mathfrak{C}_1 \cdot A_1^{-1}\mathfrak{C}_1 = B_1\mathfrak{C}_1$$

oder

$$B_1'\mathfrak{C}_1 = A_1 B_1 A_1^{-1} \cdot \mathfrak{C}_1 = B_1\mathfrak{C}_1,$$

ebenso

$$B_2'\mathfrak{C}_2 = A_2 B_2 A_2^{-1} \cdot \mathfrak{C}_2 = B_2\mathfrak{C}_2.$$

Da $B_1\mathfrak{C}_1$ und $B_2\mathfrak{C}_2$ einander zugeordnete Komplexe sind, so gehören auch B_1' und B_2' einander zugeordneten Komplexen an. (Und zwar sogar denselben Komplexen. Es ist

$$B_1' = B_1 C_1, \quad B_2' = B_2 C_2,$$

wo $C_1 < \mathfrak{C}_1$, $C_2 < \mathfrak{C}_2$.) Mithin ist $G' < \mathfrak{G}$, also

$$\mathfrak{G} <_i \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2.$$

§ 2. Sätze über die Darstellbarkeit einer endlichen Gruppe als subdirektes Produkt.

Satz 3: *Es besitze die Gruppe* $\mathfrak{G}$ *n invariante Untergruppen,* $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_n$,

$$\mathfrak{D}_\nu <_i \mathfrak{G} \quad \textit{für} \quad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

(Es können auch mehrere der $\mathfrak{D}_\nu$ untereinander gleich sein.) *Man führe für ihren Durchschnitt die Abkürzung ein*

$$(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_n) = \mathfrak{D}^* <_i \mathfrak{G}.$$

Es seien $\widehat{\mathfrak{B}}_1, \widehat{\mathfrak{B}}_2, \ldots, \widehat{\mathfrak{B}}_n$ *n abstrakt gegebene Gruppen, die den Faktorgruppen eineindeutig isomorph seien.*

$$(1) \qquad \widehat{\mathfrak{B}}_\nu \overset{\nu}{\sim} \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}_\nu} \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Diese Gruppen, die zum Zwecke der Darstellung von $\mathfrak{G}$ neu gebildet werden, sollen samt ihren Untergruppen durch Buchstaben mit einem $\widehat{\ }$ bezeichnet werden zum Unterschiede von $\mathfrak{G}$ und seinen Untergruppen. *Man bilde durch Nebeneinanderschreiben der Komponenten das direkte Produkt der* $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$. *Dann ist* $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}^*}$ *eineindeutig isomorph einer Untergruppe des direkten Produktes.*

$$\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}^*} \asymp \widehat{\mathfrak{G}} < \widehat{\mathfrak{B}}_1 \times \widehat{\mathfrak{B}}_2 \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{B}}_n.$$

(Die Indizes unter dem $\sim$-Zeichen dienen zur Unterscheidung der Isomorphismen.) *Ist speziell* $\mathfrak{D}^* = \mathfrak{E}$, *so ist*

$$\mathfrak{G} \asymp \widehat{\mathfrak{G}} < \widehat{\mathfrak{B}}_1 \times \widehat{\mathfrak{B}}_2 \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{B}}_n.$$

Beweis: Es sei $G < \mathfrak{G}$. Es ist

$$G\,\mathfrak{D}_\nu \overset{\nu}{\sim} \widehat{B}_\nu < \widehat{\mathfrak{B}}_\nu$$

für $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Man ordne G die Zusammenstellung der für $\nu = 1, 2, \ldots, n$ so gewonnenen Elemente $\widehat{B}_\nu$ zu.

$$G \to \widehat{B}_1, \widehat{B}_2, \ldots, \widehat{B}_\nu.$$

Diese Zusammenstellung von Elementen möge die „Notiz" von G heißen. Es sei ebenfalls

$$G' \to \widehat{B}_1', \widehat{B}_2', \ldots, \widehat{B}_n',$$

wo $\widehat{B}_\nu' < \widehat{\mathfrak{B}}_\nu'$ für $\nu = 1, 2, \ldots, n$, die Notiz von G'. Wegen der Isomorphismen (1) ist

$$GG' \to \widehat{B}_1\widehat{B}_1', \widehat{B}_2\widehat{B}_2', \ldots, \widehat{B}_n\widehat{B}_n'.$$

Die den Elementen von $\mathfrak{G}$ zugeordneten Notizen bilden also eine Gruppe $\widehat{\mathfrak{G}}$, wenn man als Multiplikation der Notizen die Multiplikation entsprechender Komponenten einführt. Da man die Elemente von $\widehat{\mathfrak{B}}_1 \times \widehat{\mathfrak{B}}_2 \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{B}}_n$ durch Nebeneinanderschreiben der Komponenten erzeugen kann, so ist $\widehat{\mathfrak{G}} < \widehat{\mathfrak{B}}_1 \times \widehat{\mathfrak{B}}_2 \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{B}}_n$. Zwischen den Gruppen $\mathfrak{G}$ und $\widehat{\mathfrak{G}}$ besteht also ein Homomorphismus, der aber im allgemeinen mehrstufig sein wird; d. h. mehreren Elementen von $\mathfrak{G}$ kann dasselbe Element von $\widehat{\mathfrak{G}}$, dieselbe Notiz, entsprechen. Dem Einheitselement $\widehat{E}, \widehat{E}, \ldots, \widehat{E} < \widehat{\mathfrak{G}}$ entspricht ein Element $G < \mathfrak{G}$, das für alle ν der Bedingung $G\,\mathfrak{D}_\nu = \mathfrak{D}_\nu$ oder $G < \mathfrak{D}_\nu$ genügt. Mithin ist $G < (\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_n) = \mathfrak{D}^*$. Ist umgekehrt diese letzte Beziehung erfüllt, so ist G dem Einheitselement von $\widehat{\mathfrak{G}}$ zugeordnet. Es ist also

$$\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}^*} \asymp \widehat{\mathfrak{G}} < \widehat{\mathfrak{B}}_1 \times \widehat{\mathfrak{B}}_2 \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{B}}_n.$$

Ist speziell $\mathfrak{D}^* = \mathfrak{E}$, so ist

$$\mathfrak{G} \asymp \widehat{\mathfrak{G}} < \widehat{\mathfrak{B}}_1 \times \widehat{\mathfrak{B}}_2 \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{B}}_n,$$

was zu beweisen war.

Sind mehrere $\mathfrak{D}_\nu$ untereinander gleich, so liefert das lediglich isomorphe Wiederholung der $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$, die für die Darstellung nichts leistet.

Korollar 1 zu Satz 3: *Die Blockkomponenten des subdirekten Produkts stellen diejenigen Elemente von $\mathfrak{G}$ dar, für die alle Komponenten bis auf eine gleich $\widehat{E}$ sind. Diese Elemente gehören also allen invarianten Untergruppen $\mathfrak{D}_\mu$ bis auf eine $\mathfrak{D}_\nu$ an. Es sei*

$$\mathfrak{C}_\nu = (\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_{\nu-1}, \mathfrak{D}_{\nu+1}, \ldots, \mathfrak{D}_n).$$

Dann ist

$$\frac{\mathfrak{C}_\nu}{\mathfrak{D}^*} \asymp \widehat{\mathfrak{C}}_\nu = (\widehat{\mathfrak{G}}, \widehat{\mathfrak{B}}_\nu)$$

oder, wenn $\mathfrak{D}^* = \mathfrak{E}$,

$$\mathfrak{C}_\nu \asymp \widehat{\mathfrak{C}}_\nu = (\widehat{\mathfrak{G}}, \widehat{\mathfrak{B}}_\nu).$$

Daß unter der Voraussetzung $\mathfrak{D}^* = \mathfrak{E}$ das Produkt der $\mathfrak{C}_\nu$ ein direktes ist, kann man auch unmittelbar einsehen. Damit ein Produkt ein direktes ist, ist notwendig und hinreichend, daß jeder Faktor zum Produkt aller übrigen Faktoren teilerfremd ist. Nun ist für $\mu \neq \nu$ $\mathfrak{C}_\mu < \mathfrak{D}_\nu$, also

$$\mathfrak{X}_\nu = \mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2 \cdots \mathfrak{C}_{\nu-1}\mathfrak{C}_{\nu+1} \cdots \mathfrak{C}_n < \mathfrak{D}_\nu;$$

$\mathfrak{X}_\nu$ ist zur Abkürzung eingeführt.

$$(\mathfrak{C}_\nu, \mathfrak{X}_\nu) < (\mathfrak{C}_\nu, \mathfrak{D}_\nu) = \mathfrak{D}^* = \mathfrak{E},$$

also

$$\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2 \cdots \mathfrak{C}_n = \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2 \times \cdots \times \mathfrak{C}_n.$$

Korollar 2 zu Satz 3: *Die durch Satz 3 gelieferten subdirekten Produkte sind die allgemeinsten, die möglich sind.*

Beweis: Es sei

$$\mathfrak{G} < \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \cdots \times \mathfrak{A}_n$$

ein beliebiges subdirektes Produkt. $\mathfrak{B}_\nu$ sei die $\mathfrak{A}_\nu$-Komponente von $\mathfrak{G}$. Ordnet man jedes Element von $\mathfrak{G}$ seiner $\mathfrak{B}_\nu$-Komponente zu, so ist $\mathfrak{B}_\nu$ homomorph zu $\mathfrak{G}$, also isomorph einer Faktorgruppe von $\mathfrak{G}$. Dem Einheitselemente $E < \mathfrak{B}_\nu$ sind diejenigen Elemente von $\mathfrak{G}$ zugeordnet, die die $\mathfrak{A}_\nu$-Komponente E besitzen. Es sind dies die Elemente von

$$(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \cdots \times \mathfrak{A}_{\nu-1} \times \mathfrak{A}_{\nu+1} \times \cdots \times \mathfrak{A}_n) = \mathfrak{D}_\nu,$$

wo $\mathfrak{D}_\nu$ zur Abkürzung eingeführt ist. Es ist, wenn man in $\mathfrak{A}_\nu$ und seinen Komplementärfaktor zerlegt, Satz 1 anwendbar; er liefert $\mathfrak{D}_\nu <^i \mathfrak{G}$. Es ist also $\mathfrak{B}_\nu \sim \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}_\nu}$. In $\mathfrak{D}_\nu$ ist die $\mathfrak{A}_\nu$-Komponente gleich E. Mithin sind im Durchschnitt der $\mathfrak{D}_\nu$ sämtliche Komponenten gleich E. Es ist also

$$\mathfrak{D}^* = (\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_n) = \mathfrak{E}.$$

Die invarianten Untergruppen $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_n$ von $\mathfrak{G}$ genügen somit den Voraussetzungen des Satzes 3. Es ist $\mathfrak{D}^* = \mathfrak{E}$, also $\mathfrak{G}$ als Untergruppe von $\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2 \times \cdots \times \mathfrak{B}_n$ darstellbar. Die gegebene Darstellung von $\mathfrak{G}$ ist gleichzeitig die dem Satze 3 genügende.

Es sollen zwei wichtige Spezialfälle des Satzes 3 behandelt werden. Es sei zunächst $n = 2$.

Satz 4: *Wenn*

$$\mathfrak{D}_1 <^i \mathfrak{G}, \quad \mathfrak{D}_2 <^i \mathfrak{G}, \quad (\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2) = \mathfrak{E}, \quad \mathfrak{B}_1 \overset{1}{\sim} \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}_1}, \quad \mathfrak{B}_2 \overset{2}{\sim} \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}_2},$$

so ist

$$\mathfrak{G} \asymp \widehat{\mathfrak{G}} = \frac{\widehat{\mathfrak{B}}_1}{\widehat{\mathfrak{C}}_1} \times \frac{\widehat{\mathfrak{B}}_2}{\widehat{\mathfrak{C}}_2},$$

derart, daß $\mathfrak{D}_1 \asymp \widehat{\mathfrak{C}}_2$, $\mathfrak{D}_2 \asymp \widehat{\mathfrak{C}}_1$. *$\mathfrak{G}$ ist mithin als meromorphes Produkt darstellbar.*

Beweis: Es ist zunächst nach Satz 3

$$\mathfrak{G} \asymp \widehat{\mathfrak{G}} < \widehat{\mathfrak{B}}_1 \times \widehat{\mathfrak{B}}_2,$$

wo $\widehat{\mathfrak{B}}_1$ und $\widehat{\mathfrak{B}}_2$ die Komponenten von $\widehat{\mathfrak{G}}$ sind. Es ist

$$\widehat{\mathfrak{B}}_1 \overset{1}{\sim} \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}_1}, \quad \widehat{\mathfrak{B}}_2 \overset{2}{\sim} \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}_2}.$$

Nach Satz 1 ist

$$\mathfrak{G} = \frac{\widehat{\mathfrak{B}}_1}{\widehat{\mathfrak{C}}_1} \times \frac{\widehat{\mathfrak{B}}_2}{\widehat{\mathfrak{C}}_2},$$

worin

$$\widehat{\mathfrak{C}}_1 = (\widehat{\mathfrak{G}}, \widehat{\mathfrak{B}}_1), \quad \widehat{\mathfrak{C}}_2 = (\widehat{\mathfrak{G}}, \widehat{\mathfrak{B}}_2).$$

Es ist $\widehat{\mathfrak{C}}_1$ die Untergruppe derjenigen Elemente von $\widehat{\mathfrak{G}}$, deren $\widehat{\mathfrak{B}}_2$-Komponente gleich $\widehat{E}$ ist. Also ist $\widehat{\mathfrak{C}}_1 \asymp \mathfrak{D}_2$, ebenso $\mathfrak{C}_2 \asymp \mathfrak{D}_1$. Damit ist Satz 4 bewiesen.

Korollar 1 zu Satz 4: Der bekannte Hilfssatz: „Wenn $\mathfrak{D}_1 <^i \mathfrak{G}$, $\mathfrak{D}_2 <^i \mathfrak{G}$, $(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2) = \mathfrak{E}$, so ist $\mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2 = \mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}_2$“, ist hier noch einmal mit bewiesen.

Korollar 2 zu Satz 4: *Wenn* $(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2) = \mathfrak{E}$, *so können zwei Komplexe von* $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}_1}$ *und* $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}_2}$ *nicht mehr als ein Element gemeinsam haben.*

Beweis: Wenn G das erste gemeinsame Element zweier Komplexe $G\,\mathfrak{D}_1$ und $G\,\mathfrak{D}_2$ ist, so wäre außerdem $GD_1 = GD_2$, wo $D_1 < \mathfrak{D}_1$, $D_2 < \mathfrak{D}_2$. Also ist $D_1 = D_2 < (\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2) = \mathfrak{E}$, mithin $D_1 = D_2 = E$. Also haben die beiden Komplexe höchstens ein Element gemeinsam.

Korollar 3 zu Satz 4: Wenn zwei Komplexe von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}_1}$ und $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}_2}$ ein Element G gemeinsam haben, so ist

$$G\,\mathfrak{D}_1 < G(\mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}_2),$$
$$G\,\mathfrak{D}_2 < G(\mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}_2).$$

Die Komplexe von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{D}_1$ und nach $\mathfrak{D}_2$ gehören dem gleichen Komplexe nach $\mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}_2$ an. Es ist

$$\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}_2} \sim \frac{\left(\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}_1}\right)}{\left(\frac{\mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}_2}{\mathfrak{D}_1}\right)} \asymp \frac{\widehat{\mathfrak{B}}_1}{\widehat{\mathfrak{C}}_1}.$$

Ebenso für Index 2.

Satz 5: *Besitzt eine Gruppe n invariante Untergruppen, deren Produkt ein direktes ist, so ist sie als meromorphes Produkt von n Faktoren darstellbar.*

Beweis: Es sei $\mathfrak{C}_\nu <^i \mathfrak{G}$ für $\nu = 1, 2, \ldots, n$;

$$\mathfrak{C}^\times = \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2 \times \cdots \times \mathfrak{C}_n <^i \mathfrak{G}.$$

Man setze

$$\mathfrak{D}_\nu = \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2 \times \cdots \times \mathfrak{C}_{\nu-1} \times \mathfrak{C}_{\nu+1} \times \cdots \times \mathfrak{C}_n,$$

also

$$\mathfrak{C}^\times = \mathfrak{D}_\nu \times \mathfrak{C}_\nu \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Die Zugehörigkeit eines Elementes von $\mathfrak{C}^\times$ zu $\mathfrak{D}_\nu$ ist gleichbedeutend damit, daß seine $\mathfrak{C}_\nu$-Komponente gleich E ist. Es ist mithin

$$\mathfrak{D}^* = (\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_n) = \mathfrak{E},$$

da in $\mathfrak{D}^*$ die $\mathfrak{C}_\nu$-Komponenten für sämtliche ν gleich E sein müssen. Es ist

$$(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_{\nu-1}, \mathfrak{D}_{\nu+1}, \ldots, \mathfrak{D}_n) = \mathfrak{C}_\nu,$$

da für diesen Durchschnitt alle $\mathfrak{C}_\mu$-Komponenten für $\mu \neq \nu$ gleich E sein müssen, also nur eine $\mathfrak{C}_\nu$-Komponente übrig bleibt, da andererseits $\mathfrak{C}_\nu < \mathfrak{D}_\mu$ für $\mu \neq \nu$. Es sei

$$\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}_\nu} \overset{\nu}{\sim} \widehat{\mathfrak{B}}_\nu.$$

Dann ist, wegen $\mathfrak{D}^* = \mathfrak{E}$, nach Satz 3

$$\mathfrak{G} \asymp \widehat{\mathfrak{G}} < \widehat{\mathfrak{B}}_1 \times \widehat{\mathfrak{B}}_2 \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{B}}_n.$$

Nach Korollar 1 zu Satz 3 ist die Blockkomponente

$$\mathfrak{C}_\nu \asymp \widehat{\mathfrak{C}}_\nu = (\widehat{\mathfrak{G}}, \widehat{\mathfrak{B}}_\nu).$$

Es ist

$$\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{C}^\times} \sim \frac{\left(\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}_\nu}\right)}{\left(\frac{\mathfrak{C}^\times}{\mathfrak{D}_\nu}\right)} \overset{\nu}{\sim} \frac{\widehat{\mathfrak{B}}_\nu}{\widehat{\mathfrak{C}}'_\nu}.$$

(Das Zeichen $\overset{\nu}{\sim}$ ist im erweiterten Sinne auf die Faktorgruppen angewandt.) Mithin ist

$$(1) \qquad \frac{\widehat{\mathfrak{B}}_\nu}{\widehat{\mathfrak{C}}'_\nu} \sim \frac{\widehat{\mathfrak{B}}_\mu}{\widehat{\mathfrak{C}}'_\mu}$$

für alle μ, ν. Hier in bedeutet $\widehat{\mathfrak{C}}'_\nu$ diejenige Untergruppe von $\mathfrak{B}_\nu$, die der Isomorphismus $\widetilde{\ }_\nu$ der Untergruppe $\frac{\mathfrak{C}^\times}{\mathfrak{D}_\nu}$ von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}_\nu}$ zuordnet. Es ist

$$\widehat{\mathfrak{C}}'_\nu \widetilde{\ }_\nu \frac{\mathfrak{C}^\times}{\mathfrak{D}_\nu} = \frac{\mathfrak{D}_\nu \times \mathfrak{C}_\nu}{\mathfrak{D}_\nu} \sim \mathfrak{C}_\nu .$$

Für $\mu \neq \nu$ ist $\mathfrak{C}_\nu < \mathfrak{D}_\mu$. Mithin sind die $\widehat{\mathfrak{B}}_\mu$-Komponenten von $\mathfrak{C}_\nu$ gleich $\widehat{\mathfrak{E}}$ und nur die $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$-Komponente von $\mathfrak{C}_\nu$ von $\widehat{\mathfrak{E}}$ verschieden. Mithin ist auch $\mathfrak{C}_\nu \asymp \widehat{\mathfrak{C}}'_\nu$, also $\widehat{\mathfrak{C}}'_\nu < \widehat{\mathfrak{G}}$. Es war aber $\mathfrak{C}_\nu \asymp \widehat{\mathfrak{C}}_\nu$, also $\widehat{\mathfrak{C}}'_\nu = \widehat{\mathfrak{C}}_\nu = (\widehat{\mathfrak{G}}, \widehat{\mathfrak{B}}_\nu)$. Für (1) können wir jetzt schreiben:

$$(2) \qquad \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{C}^\times} \sim \frac{\widehat{\mathfrak{B}}_\nu}{\widehat{\mathfrak{C}}_\nu} \sim \frac{\widehat{\mathfrak{B}}_\mu}{\widehat{\mathfrak{C}}_\mu} .$$

Zwei Elemente $\widehat{B}_\nu < \widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ und $\widehat{B}_\mu < \widehat{\mathfrak{B}}_\mu$ mögen Komponenten desselben Elementes $\widehat{G} < \widehat{\mathfrak{G}}$ sein. Es sei $\widehat{G} \asymp G$. Dann ist

$$G\mathfrak{D}_\nu \widetilde{\ }_\nu \widehat{B}_\nu, \quad G\mathfrak{D}_\mu \widetilde{\ }_\mu \widehat{B}_\mu .$$

Wegen (2) ist

$$G\mathfrak{C}^\times \widetilde{\ }_\nu \widehat{B}_\nu \widehat{\mathfrak{C}}_\nu, \quad G\mathfrak{C}^\times \widetilde{\ }_\mu \widehat{B}_\mu \widehat{\mathfrak{C}}_u .$$

Es kommen also nur solche $\widehat{B}_\nu$ und $\widehat{B}_\mu$ miteinander multipliziert vor, die Komplexen $\widehat{B}_\nu \widehat{\mathfrak{C}}_\nu$ bzw. $\widehat{B}_\mu \widehat{\mathfrak{C}}_\mu$ angehören, die durch die Isomorphismen (2) dem gleichen Komplex von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{C}^\times}$ zugeordnet sind. Da sämtliche $\widehat{\mathfrak{C}}_\nu < \widehat{\mathfrak{G}}$, kommen derart einander zugeordnete Komplexe in ihrer Gesamtheit miteinander multipliziert in $\widehat{\mathfrak{G}}$ vor. Man erhält also $\widehat{\mathfrak{G}}$ als Untergruppe von $\widehat{\mathfrak{B}}_1 \times \widehat{\mathfrak{B}}_2 \times \cdots \widehat{\mathfrak{B}}_n$, indem man immer die n Komplexe, die durch (1) bzw. (2) einem bestimmten Komplex von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{C}^\times}$ zugeordnet sind, elementweise miteinander multipliziert. Ein derartiges Produkt war als meromorphes Produkt von n Faktoren bezeichnet worden.

$$\widehat{\mathfrak{G}} = \frac{\widehat{\mathfrak{B}}_1}{\widehat{\mathfrak{C}}_1} \asymp \frac{\widehat{\mathfrak{B}}_2}{\widehat{\mathfrak{C}}_2} \asymp \cdots \asymp \frac{\widehat{\mathfrak{B}}_n}{\widehat{\mathfrak{C}}_n} .$$

Korollar zu Satz 5: *Es sei* $\mathfrak{D}_\nu <_i \mathfrak{G}$ *für* $\nu = 1, 2, \ldots, n$.

$$(1) \qquad (\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_n) = \mathfrak{E}.$$

Man setze

$$\mathfrak{C}_\nu = (\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_{\nu-1}, \mathfrak{D}_{\nu+1}, \ldots, \mathfrak{D}_n).$$

Dann ist stets

$$\mathfrak{C}^\times = \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2 \times \cdots \times \mathfrak{C}_n$$

ein direktes Produkt nach Korollar 1 *zu Satz* 3. *Es wird nun weiter vorausgesetzt, daß*

$$(2) \qquad \mathfrak{C}^\times > \mathfrak{D}_\nu \quad \textit{für} \quad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Man setze

$$\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}_\nu} \widetilde{\ }_\nu \widehat{\mathfrak{B}}_\nu \quad \textit{für} \quad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Nach Satz 3 ist bereits auf Grund der Voraussetzung (1) allein

$$\mathfrak{G} \simeq \widehat{\mathfrak{G}} < \widehat{\mathfrak{B}}_1 \times \widehat{\mathfrak{B}}_2 \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{B}}_n.$$

Nach Korollar 1 zu Satz 3 ist ebenfalls bereits auf Grund der Voraussetzung (1) allein

$$\mathfrak{C}_\nu \simeq \widehat{\mathfrak{C}}_\nu = (\widehat{\mathfrak{G}}, \widehat{\mathfrak{B}}_\nu)$$

für $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Es wird behauptet, daß unter der Voraussetzung (2) $\mathfrak{G}$ als meromorphes Produkt darstellbar ist

$$\mathfrak{G} \simeq \widehat{\mathfrak{G}} = \frac{\widehat{\mathfrak{B}}_1}{\widehat{\mathfrak{C}}_1} \asymp \frac{\widehat{\mathfrak{B}}_2}{\widehat{\mathfrak{C}}_2} \asymp \cdots \asymp \frac{\widehat{\mathfrak{B}}_n}{\widehat{\mathfrak{C}}_n}. \tag{3}$$

Beweis: Man setze vorläufig

$$\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2 \times \cdots \times \mathfrak{C}_{\nu-1} \times \mathfrak{C}_{\nu+1} \times \cdots \times \mathfrak{C}_n = \mathfrak{D}'_\nu.$$

Da für $\mu \neq \nu$ $\mathfrak{C}_\mu < \mathfrak{D}_\nu$, so ist $\mathfrak{D}'_\nu < \mathfrak{D}_\nu$. Es ist $\mathfrak{C}^\times = \mathfrak{D}'_\nu \times \mathfrak{C}_\nu$, also nach der Voraussetzung (2)

$$\mathfrak{D}'_\nu < \mathfrak{D}_\nu < \mathfrak{C}^\times = \mathfrak{D}'_\nu \times \mathfrak{C}_\nu.$$

Nach Korollar 3 zu Satz 1 ist

$$\mathfrak{D}_\nu = \mathfrak{D}'_\nu \times (\mathfrak{D}_\nu, \mathfrak{C}_\nu).$$

Da aber $(\mathfrak{D}_\nu, \mathfrak{C}_\nu) = \mathfrak{E}$ nach Voraussetzung (1), so ist $\mathfrak{D}_\nu = \mathfrak{D}'_\nu$; daher

$$\mathfrak{D}_\nu = \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2 \times \cdots \times \mathfrak{C}_{\nu-1} \times \mathfrak{C}_{\nu+1} \times \cdots \times \mathfrak{C}_n.$$

Es stehen also die $\mathfrak{D}_\nu$ zu den $\mathfrak{C}_\nu$ in den gleichen Beziehungen wie in Satz 5, also ist nach Satz 5 die Behauptung (3) bewiesen.

Es ist übrigens für $\mu \neq \nu$

$$\mathfrak{C}^\times = \mathfrak{D}_\nu \cdot \mathfrak{D}_\mu = \mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2 \cdots \mathfrak{D}_n.$$

§ 3. Über die Zerlegung der endlichen Gruppen in subdirekte unzerlegbare Faktoren.

Von der vorangehenden Arbeit „Über minimale invariante Untergruppen in der Theorie der endlichen Gruppen", zitiert M I U [9a]), werde ich von jetzt ab Gebrauch machen.

Eine Gruppe heiße „subdirekt zerlegbar", wenn sie eineindeutig darstellbar ist als subdirektes Produkt von zwei oder mehr subdirekten Faktoren *niedrigerer Ordnung* als die gegebene Gruppe, wenn das nicht möglich ist, „subdirekt unzerlegbar".

Die Komponenten eines jeden Faktors, der weiter subdirekt zerlegbar ist, können ersetzt werden durch mehrere Komponenten der Darstellung des Faktors. Es sei

$$\mathfrak{G} \simeq \widehat{\mathfrak{G}} < \widehat{\mathfrak{B}}_1 \times \widehat{\mathfrak{B}}_2 \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{B}}_{n-1} \times \widehat{\mathfrak{B}}_n$$

eine subdirekte Darstellung von $\mathfrak{G}$. Sämtliche $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ seien von kleinerer Ordnung als $\mathfrak{G}$. Es sei weiter

$$\widehat{\mathfrak{B}}_n \sim \widehat{\widehat{\mathfrak{B}}}_n < \widehat{\widehat{\mathfrak{R}}}_1 \times \widehat{\widehat{\mathfrak{R}}}_2 \times \cdots \times \widehat{\widehat{\mathfrak{R}}}_m$$

eine subdirekte Darstellung von $\widehat{\mathfrak{B}}_n$, wo jeder Faktor $\widehat{\widehat{\mathfrak{R}}}_n$ von kleinerer Ordnung als $\widehat{\mathfrak{B}}_n$ sei. Man ersetze in $\widehat{\mathfrak{G}}$ jede $\widehat{\mathfrak{B}}_n$-Komponente durch ihre Darstellung als Untergruppe von $\widehat{\widehat{\mathfrak{R}}}_1 \times \widehat{\widehat{\mathfrak{R}}}_2 \times \cdots \times \widehat{\widehat{\mathfrak{R}}}_m$. Man erhält so eine zu $\widehat{\mathfrak{G}}$ isomorphe Darstellung

$$\mathfrak{G} \simeq \widehat{\mathfrak{G}} \lessapprox \widehat{\widehat{\mathfrak{G}}} < \widehat{\mathfrak{B}}_1 \times \widehat{\mathfrak{B}}_2 \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{B}}_{n-1} \times \widehat{\widehat{\mathfrak{R}}}_1 \times \widehat{\widehat{\mathfrak{R}}}_2 \times \cdots \times \widehat{\widehat{\mathfrak{R}}}_m.$$

Man kann also in jeder subdirekten Zerlegung jeden Faktor weiter zerlegen. Da die Ordnung der Faktoren fortgesetzt verkleinert wird, muß das Verfahren nach einer end-

[9a]) Siehe l. c. Anm. 3a.

lichen Anzahl von Schritten abbrechen. Jede Gruppe ist also darstellbar als subdirektes Produkt von subdirekt unzerlegbaren Faktoren.

Für „minimale invariante Untergruppe" war in MIU die abkürzende Bezeichnung „Fuß" eingeführt worden. Eine Gruppe, die nur einen Fuß besitzt, möge „einfüßig" heißen.

Satz 6: *Subdirekt unzerlegbar sind alle einfüßigen Gruppen und nur diese.*

Beweis: Nach Satz 4 ist eine Gruppe subdirekt zerlegbar, wenn sie zwei zueinander teilerfremde invariante Untergruppen besitzt. Enthält eine Gruppe zwei voneinander verschiedene Füße, so sind diese teilerfremd, also ist die Gruppe subdirekt zerlegbar. Gruppen mit mehr als einem Fuß sind also stets subdirekt zerlegbar; subdirekt unzerlegbar können also nur einfüßige Gruppen sein.

Es soll gezeigt werden, daß umgekehrt auch alle einfüßigen Gruppen subdirekt unzerlegbar sind. Diese Behauptung ist gleichbedeutend damit, daß jede subdirekt zerlegbare Gruppe mehr als einen Fuß besitzen muß. Es sei

$$\mathfrak{G} \asymp \widehat{\mathfrak{G}} < \widehat{\mathfrak{B}}_1 \times \widehat{\mathfrak{B}}_2 \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{B}}_n;$$

$$\text{Ord } \mathfrak{B}_\nu < \text{Ord } \mathfrak{G} \qquad \text{für } \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Läßt man im direkten Produkt irgend ein $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ fort, so bilden die Komponenten von $\mathfrak{G}$ nach $\widehat{\mathfrak{B}}_1 \times \widehat{\mathfrak{B}}_2 \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{B}}_{\nu-1} \times \widehat{\mathfrak{B}}_{\nu+1} \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{B}}_n$ eine Gruppe, die zu $\widehat{\mathfrak{G}}$ homomorph ist. Der Homomorphismus kann ein mehrstufiger sein, so daß mehreren Elementen von $\mathfrak{G}$ die gleichen Komponenten nach $\widehat{\mathfrak{B}}_1, \widehat{\mathfrak{B}}_2, \ldots, \widehat{\mathfrak{B}}_{\nu-1}, \widehat{\mathfrak{B}}_{\nu+1}, \ldots, \widehat{\mathfrak{B}}_n$ zugeordnet sind. Man unterwerfe nun die Darstellung von $\mathfrak{G}$ der folgenden Prüfung. Man lasse versuchsweise einen Faktor $\mathfrak{B}_\nu$ fort; ist die Darstellung von $\mathfrak{G}$ durch die übrigen Komponenten eine homomorphe, so behalte man $\mathfrak{B}_\nu$ bei. Ist die Darstellung von $\mathfrak{G}$ durch die übrigen Komponenten eine isomorphe, so streiche man $\mathfrak{B}_\nu$ endgültig. Auf die übrig bleibenden Komponenten wende man dasselbe Verfahren an, indem man irgend eine Komponente versuchsweise fortläßt und sie streicht, wenn die Darstellung von $\mathfrak{G}$ ohne sie noch isomorph ist; so fahre man fort, so lange man noch eine Komponente zum Streichen findet. Da die Zahl der Komponenten endlich ist, muß das Verfahren nach endlich vielen Schritten dadurch abbrechen, daß man keine Komponente mehr finden kann, die sich streichen läßt. Man erhält also bei passender Wahl der Indizes eine Darstellung

$$\mathfrak{G} \asymp \widehat{\mathfrak{G}} < \widehat{\mathfrak{B}}_1 \times \widehat{\mathfrak{B}}_2 \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{B}}_m,$$

in der kein $\mathfrak{B}_\mu$ weggelassen werden kann, ohne daß die Darstellung aufhört, eindeutig zu sein. Es muß $m \geqq 2$ sein; $m = 1$ ist nicht möglich, da Ord $\mathfrak{B}_1 <$ Ord $\mathfrak{G}$, was dem Isomorphismus widersprechen würde. Man setze zur Abkürzung

$$\widehat{\mathfrak{B}}_2 \times \widehat{\mathfrak{B}}_3 \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{B}}_m = \widehat{\mathfrak{A}}_2;$$

$\mathfrak{G} < \widehat{\mathfrak{B}}_1 \times \widehat{\mathfrak{A}}_2$ ist, als Untergruppe eines direkten Produktes zweier Faktoren aufgefaßt, ein meromorphes Produkt.

Es sei $(\widehat{\mathfrak{G}}, \widehat{\mathfrak{B}}_1) = \widehat{\mathfrak{C}}_1$; die $\widehat{\mathfrak{A}}_2$-Komponente von $\widehat{\mathfrak{G}}$ heiße $\widehat{\mathfrak{K}}_2$; $(\widehat{\mathfrak{G}}, \widehat{\mathfrak{A}}_2) = \widehat{\mathfrak{D}}_2$; dann ist nach Satz 1

$$\widehat{\mathfrak{G}} = \frac{\widehat{\mathfrak{B}}_1}{\widehat{\mathfrak{C}}_1} \asymp \frac{\widehat{\mathfrak{K}}_2}{\widehat{\mathfrak{D}}_2}.$$

Es ist Ord $\widehat{\mathfrak{K}}_2 <$ Ord $\widehat{\mathfrak{G}}$, weil aus Ord $\widehat{\mathfrak{K}}_2 =$ Ord $\widehat{\mathfrak{G}}$ $\widehat{\mathfrak{G}} \sim \widehat{\mathfrak{K}}_2$ folgen würde, man also $\widehat{\mathfrak{B}}_1$ ohne Verlust der Eindeutigkeit der Darstellung hätte weglassen können, was der

vorher getroffenen Auswahl widerspricht. Es muß mithin Ord $\widehat{\mathfrak{K}}_2 <$ Ord $\widehat{\mathfrak{G}}$ sein. Es ist auch Ord $\widehat{\mathfrak{B}}_1 <$ Ord $\widehat{\mathfrak{G}}$. Nun ist nach Korollar 1a zu Satz 1

$$\text{Ord } \widehat{\mathfrak{G}} = \text{Ord } \widehat{\mathfrak{B}}_1 \cdot \text{Ord } \widehat{\mathfrak{D}}_2 = \text{Ord } \widehat{\mathfrak{K}}_2 \cdot \text{Ord } \widehat{\mathfrak{C}}_1 .$$

Hieraus folgt

$$\text{Ord } \widehat{\mathfrak{D}}_2 > 1, \quad \text{Ord } \widehat{\mathfrak{C}}_1 > 1,$$

also

$$\widehat{\mathfrak{D}}_2 \neq \widehat{\mathfrak{E}}, \quad \widehat{\mathfrak{C}}_1 \neq \widehat{\mathfrak{E}}.$$

Somit enthalten $\widehat{\mathfrak{C}}_1$ und $\widehat{\mathfrak{D}}_2$ Füße, $\widehat{\mathfrak{F}}_1 < \widehat{\mathfrak{C}}_1$, $\widehat{\mathfrak{F}}_2 < \widehat{\mathfrak{D}}_2$. Es ist

$$(\widehat{\mathfrak{F}}_1, \widehat{\mathfrak{F}}_2) < (\widehat{\mathfrak{C}}_1, \widehat{\mathfrak{D}}_2) = \widehat{\mathfrak{E}},$$

also $\widehat{\mathfrak{F}}_1 \neq \widehat{\mathfrak{F}}_2$. $\mathfrak{G}$ besitzt also zwei verschiedene Füße. Jede subdirekt zerlegbare Gruppe besitzt also mindestens zwei Füße. Also ist jede einfüßige Gruppe subdirekt unzerlegbar. Damit ist Satz 6 bewiesen.

Korollar zu Satz 6: *Jede endliche Gruppe ist als subdirektes Produkt einfüßiger Gruppen darstellbar.*

Eine subdirekte Darstellung einer Gruppe $\mathfrak{G}$ durch einfüßige Faktoren möge „unbestimmt" heißen, wenn nicht $\mathfrak{G}$, sondern nur eine Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}^*}$ dargestellt wird. Wird $\mathfrak{G}$ selbst eindeutig isomorph dargestellt, so heiße die Darstellung „bestimmt". Ein Faktor, der fortgelassen werden kann, ohne daß die Darstellung aufhört bestimmt zu sein, heiße „überzählig". Eine subdirekte Darstellung durch einfüßige Faktoren, die überzählige Faktoren enthält, heiße „überbestimmt"; eine subdirekte Darstellung durch einfüßige Faktoren, die keinen überzähligen Faktor enthält, heiße „ökonomisch".

Satz 7: *Ein Faktor ist dann und nur dann überzählig, wenn seine Blockkomponente gleich* $\widehat{\mathfrak{E}}$ *ist.*

Beweis: Es sei

$$\mathfrak{G} \asymp \widehat{\mathfrak{G}} < \widehat{\mathfrak{B}}_1 \times \widehat{\mathfrak{B}}_2 \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{B}}_n ,$$

wo die $\mathfrak{B}_\nu$ subdirekte Faktoren seien. Es sei wieder, wie im Beweise des Satzes 6,

$$\widehat{\mathfrak{B}}_2 \times \widehat{\mathfrak{B}}_3 \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{B}}_n = \widehat{\mathfrak{A}}_2 ,$$

$\widehat{\mathfrak{K}}_2$ die $\widehat{\mathfrak{A}}_2$-Komponente von $\widehat{\mathfrak{G}}$,

$$\mathfrak{G} = \frac{\widehat{\mathfrak{B}}_1}{\widehat{\mathfrak{C}}_1} \asymp \frac{\widehat{\mathfrak{K}}_2}{\widehat{\mathfrak{D}}_2} .$$

Der subdirekte Faktor $\widehat{\mathfrak{B}}_1$ ist dann und nur dann überzählig, wenn

$$\widehat{\mathfrak{G}} \sim \widehat{\mathfrak{K}}_2 .$$

Dann ist Ord $\widehat{\mathfrak{G}} =$ Ord $\widehat{\mathfrak{K}}_2$. Es war aber nach Korollar 1a zu Satz 1

$$\text{Ord } \widehat{\mathfrak{G}} = \text{Ord } \widehat{\mathfrak{K}}_2 \cdot \text{Ord } \widehat{\mathfrak{C}}_1 ,$$

mithin Ord $\widehat{\mathfrak{C}}_1 = 1$, $\widehat{\mathfrak{C}}_1 = \widehat{\mathfrak{E}}$. Ist umgekehrt $\widehat{\mathfrak{C}}_1 = \widehat{\mathfrak{E}}$, so ist nach Korollar 2 zu Satz 1 $\widehat{\mathfrak{G}} \sim \widehat{\mathfrak{K}}_2$, also $\widehat{\mathfrak{B}}_1$ überzählig. Damit ist Satz 7 bewiesen.

Die Betrachtung gilt für jede eindeutige subdirekte Darstellung von $\mathfrak{G}$; von der Einfüßigkeit haben wir keinen Gebrauch gemacht.

Korollar 1 zu Satz 7: *Ist ein einfüßiger subdirekter Faktor nicht überzählig*, so ist $\widehat{\mathfrak{C}}_1 \neq \widehat{\mathfrak{E}}$; bezeichnet $\widehat{\mathfrak{F}}_1$ den einzigen Fuß von $\widehat{\mathfrak{B}}_1$, so ist dieser in allen invarianten Untergruppen von $\widehat{\mathfrak{B}}_1$ enthalten, also $\widehat{\mathfrak{F}}_1 < \widehat{\mathfrak{C}}_1$; $\widehat{\mathfrak{F}}_1$ *kommt somit in der Blockkomponente* $\widehat{\mathfrak{C}}_1$ *vor.*

Korollar 2 zu Satz 7: *In einer ökonomischen subdirekten Darstellung sind die erzeugenden invarianten Untergruppen* $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_n$ *sämtlich voneinander verschieden.*

Beweis: Ist $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_2$ und $(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_n) = \mathfrak{E}$, so ist auch $(\mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_3, \ldots, \mathfrak{D}_n) = \mathfrak{E}$. Jedes der verschiedenen $\mathfrak{D}_\nu$ braucht also nur einmal aufgeführt zu werden.

Das läßt sich auch aus Satz 7 ersehen. Wenn $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_2$, so ist die Blockkomponente von $\widehat{\mathfrak{B}}_1 \text{ in } \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}_1}$

$$\widehat{\mathfrak{C}}_1 \asymp \mathfrak{C}_1 = (\mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_3, \ldots, \mathfrak{D}_n).$$

Unter unserer Voraussetzung ergibt sich $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{E}$, also $\widehat{\mathfrak{C}}_1 = \widehat{\mathfrak{E}}$; mithin ist jeder subdirekte Faktor $\widehat{\mathfrak{B}}_\mu$ überzählig, der durch eine invariante Untergruppe $\mathfrak{D}_\mu$ erzeugt wird, die unter den $\mathfrak{D}_\nu$ mehrfach vorkommt.

Korollar 3 zu Satz 7: Hat man auf Grund des Satzes 7 die Überzähligkeit mehrerer subdirekter Faktoren daran erkannt, daß ihre Blockkomponente gleich $\widehat{\mathfrak{E}}$ ist, so darf man sie nicht alle gleichzeitig fortlassen. Denn durch Fortlassen eines Faktors können andere Faktoren ihren Charakter als überzählige verlieren. Kommt z. B. dasselbe $\mathfrak{D}_\nu$ μ mal vor, so darf man es $\mu - 1$ mal, aber nicht μ mal fortlassen. Wir werden aber später sehen, daß es auch Faktoren gibt, die unter allen Umständen weggelassen werden dürfen.

Dem Beweise des folgenden Hauptsatzes 8 schicke ich mehrere Hilfssätze voran.

Hilfssatz 1: *Es sei*

$$\mathfrak{G} < \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2 \times \cdots \times \mathfrak{B}_n,$$

die $\mathfrak{B}_\nu$ *seien die subdirekten Faktoren*; $\mathfrak{C}_\nu <^i \mathfrak{B}_\nu$ *für* $\nu = 1, 2, \ldots, n$ *seien die Blockkomponenten. Es sei für ein festes* ν $\mathfrak{X} <^i \mathfrak{B}_\nu$, $\mathfrak{X} < \mathfrak{C}_\nu$.

Behauptung: $\mathfrak{X} <^i \mathfrak{G}$.

Beweis: Es sei $X < \mathfrak{X}$, $G < \mathfrak{G}$,

$$(1) \qquad G = B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_n.$$

Dann ist

$$(2) \qquad \begin{cases} GXG^{-1} = B_1 E B_1^{-1} \times B_2 E B_2^{-1} \cdots \times B_{\nu-1} E B_{\nu-1}^{-1} \\ \qquad \times B_\nu X B_\nu^{-1} \times B_{\nu+1} E B_{\nu+1}^{-1} \times \cdots \times B_n E B_n^{-1} \\ \qquad = B_\nu X B_\nu^{-1} < \mathfrak{X}, \end{cases}$$

also $\mathfrak{X} <^i \mathfrak{G}$.

Hilfssatz 2: $\mathfrak{G}, \mathfrak{B}_\nu, \mathfrak{C}_\nu$ *haben dieselbe Bedeutung wie in Hilfssatz* 1. *Es sei* $\mathfrak{X} <^i \mathfrak{G}$; $\mathfrak{X} <^i \mathfrak{C}_\nu$.

Behauptung: $\mathfrak{X} <^i \mathfrak{B}_\nu$.

Beweis: Es sei $X < \mathfrak{X}$, $G < \mathfrak{G}$; es gelte wieder die Zerlegung (1) des vorigen Beweises. Es folgt aus der Voraussetzung

$$GXG^{-1} < \mathfrak{X},$$

hieraus unter Benutzung der beiden Gleichungen zu Anfang von (2)

$$B_\nu X B_\nu^{-1} < \mathfrak{X}.$$

Da aber B_ν mit G sämtliche Elemente von $\mathfrak{B}_\nu$ durchläuft, so folgt hieraus

$$\mathfrak{X} <^i \mathfrak{B},$$

was zu beweisen war.

Korollar 1 zu Hilfssatz 1 und 2: $\mathfrak{G}, \mathfrak{B}_\nu, \mathfrak{C}_\nu$ *haben dieselbe Bedeutung wie in Hilfssatz* 1. *Es sei* $\mathfrak{F}_\nu$ *Fuß von* $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{F}_\nu < \mathfrak{C}_\nu$.

Behauptung: $\mathfrak{F}_\nu$ *ist Fuß von* $\mathfrak{B}_\nu$.

Beweis: Es ist $\mathfrak{F}_\nu <_i \mathfrak{B}_\nu$ nach Hilfssatz 2. Gäbe es nun $\mathfrak{X} <_i \mathfrak{B}$, so daß $\mathfrak{X} < \mathfrak{F}_\nu$, $\mathfrak{E} \neq \mathfrak{X} \neq \mathfrak{F}_\nu$, so wäre auch $\mathfrak{X} < \mathfrak{C}_\nu$, also $\mathfrak{X} <_i \mathfrak{G}$ nach Hilfssatz 1. Also wäre $\mathfrak{F}_\nu$ nicht Fuß von $\mathfrak{G}$, was der Voraussetzung widerspricht. Es ist also auch $\mathfrak{F}_\nu$ Fuß von $\mathfrak{B}_\nu$.

Korollar 2 zu Hilfssatz 1 und 2: $\mathfrak{G}, \mathfrak{B}_\nu, \mathfrak{C}_\nu$ *haben dieselbe Bedeutung wie in Hilfssatz* 1. *Es sei* $\mathfrak{F}_\nu$ *Fuß von* $\mathfrak{B}_\nu$, $\mathfrak{F}_\nu < \mathfrak{C}_\nu$.

Behauptung: $\mathfrak{F}_\nu$ *ist Fuß von* $\mathfrak{G}$.

Beweis: Es ist $\mathfrak{F}_\nu <_i \mathfrak{G}$ nach Hilfssatz 1. Gäbe es nun $\mathfrak{X} <_i \mathfrak{G}$, so daß $\mathfrak{X} < \mathfrak{F}_\nu$, $\mathfrak{E} \neq \mathfrak{X} \neq \mathfrak{F}_\nu$, so wäre auch $\mathfrak{X} < \mathfrak{C}_\nu$, also $\mathfrak{X} <_i \mathfrak{B}_\nu$ nach Hilfssatz 2. Also wäre $\mathfrak{F}_\nu$ nicht Fuß von $\mathfrak{B}_\nu$, was der Voraussetzung widerspricht. Mithin ist $\mathfrak{F}_\nu$ Fuß von $\mathfrak{G}$.

Das Produkt sämtlicher Füße von $\mathfrak{G}$ war in MIU der „Sockel" von $\mathfrak{G}$ genannt worden.

Korollar 3 zu Hilfssatz 1 und 2: $\mathfrak{G}, \mathfrak{B}_\nu, \mathfrak{C}_\nu$ *haben dieselbe Bedeutung wie in Hilfssatz* 1. $\mathfrak{S}$ *sei der Sockel von* $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{S}_\nu$ *der Sockel von* $\mathfrak{B}_\nu$.

Behauptung: *Es ist* $(\mathfrak{S}, \mathfrak{C}_\nu) = (\mathfrak{S}_\nu, \mathfrak{C}_\nu)$.

Beweis: Nach MIU Satz 1 a ist, da $(\mathfrak{S}, \mathfrak{C}_\nu) <_i \mathfrak{G}$ und $(\mathfrak{S}, \mathfrak{C}_\nu) < \mathfrak{S}$ ist, $(\mathfrak{S}, \mathfrak{C}_\nu)$ das Produkt sämtlicher darin enthaltener Füße von $\mathfrak{G}$, ebenso $(\mathfrak{S}_\nu, \mathfrak{C}_\nu)$ das Produkt sämtlicher darin enthaltener Füße von $\mathfrak{B}_\nu$. Es ist

$$(\mathfrak{S}, \mathfrak{C}_\nu) < (\mathfrak{S}_\nu, \mathfrak{C}_\nu)$$

nach Korollar 1 zu Hilfssatz 1 und 2,

$$(\mathfrak{S}_\nu, \mathfrak{C}_\nu) < (\mathfrak{S}, \mathfrak{C}_\nu)$$

nach Korollar 2 zu Hilfssatz 1 und 2, also:

$$(\mathfrak{S}, \mathfrak{C}_\nu) = (\mathfrak{S}_\nu, \mathfrak{C}_\nu),$$
$$(\mathfrak{S}_\nu, \mathfrak{C}_\nu) < \mathfrak{S},$$
$$(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{C}_1) \times (\mathfrak{S}_2, \mathfrak{C}_2) \times \cdots \times (\mathfrak{S}_\nu, \mathfrak{C}_\nu) < \mathfrak{S}.$$

Hilfssatz 3: *Es sei*

$$\mathfrak{G} < \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2 \times \cdots \times \mathfrak{B}_n,$$

die $\mathfrak{B}_\nu$ *die subdirekten Faktoren,* $\mathfrak{X} <_i \mathfrak{G}$, $\mathfrak{Y}_\nu$ *die* $\mathfrak{B}_\nu$*-Komponente von* $\mathfrak{X}$.

Behauptung: $\mathfrak{Y}_\nu <_i \mathfrak{B}_\nu$.

Beweis: Es sei $X < \mathfrak{X}$, $G < \mathfrak{G}$,

$$X = Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_n,$$
$$G = B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_n.$$

Es ist

$$G X G^{-1} = B_1 Y_1 B_1^{-1} \times \cdots \times B_\nu Y_\nu B_\nu^{-1} \times \cdots \times B_n Y_n B_n^{-1} < \mathfrak{X},$$

also

$$B_\nu Y_\nu B_\nu^{-1} < \mathfrak{Y}_\nu.$$

Da B_ν mit G alle Elemente von $\mathfrak{B}_\nu$ durchläuft, ist

$$\mathfrak{Y}_\nu <_i \mathfrak{B}_\nu,$$

was zu beweisen war.

Hilfssatz 4: $\mathfrak{G}, \mathfrak{B}_\nu, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}_\nu$ *haben dieselbe Bedeutung wie in Hilfssatz* 3. *Es sei für ein festes* λ $\mathfrak{U}_\lambda <_i \mathfrak{B}_\lambda$; $\mathfrak{U}_\lambda < \mathfrak{Y}_\lambda$. $\mathfrak{V}$ *sei die Untergruppe derjenigen Elemente von* $\mathfrak{X}$, *deren* $\mathfrak{B}_\lambda$*-Komponente* $< \mathfrak{U}_\lambda$.

$$\mathfrak{V} = (\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}_1 \times \mathfrak{Y}_2 \times \cdots \times \mathfrak{Y}_{\lambda-1} \times \mathfrak{U}_\lambda \times \mathfrak{Y}_{\lambda+1} \times \cdots \times \mathfrak{Y}_n)$$

Behauptung: $\mathfrak{V} <_i \mathfrak{G}$.

Beweis: Die Elemente von $\mathfrak{V}$ bilden eine Gruppe. Das Produkt von je zweien ist wieder $< \mathfrak{X}$ und hat wieder eine $\mathfrak{B}_\lambda$-Komponente $< \mathfrak{U}_\lambda$. Es sei

$$V < \mathfrak{V}, \quad G < \mathfrak{G}, \quad U_\lambda < \mathfrak{U}_\lambda, \quad Y_\nu < \mathfrak{Y}_\nu,$$

$$V = Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_{\lambda-1} \times U_\lambda \times Y_{\lambda-1} \times \cdots \times Y_n,$$

$$G = B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_n.$$

Es ist

$$GVG^{-1} = B_1 Y_1 B_1^{-1} \times B_2 Y_2 B_2^{-1} \times \cdots \times B_{\lambda-1} Y_{\lambda-1} B_{\lambda-1}^{-1}$$
$$\times B_\lambda U_\lambda B_\lambda^{-1} \times B_{\lambda+1} Y_{\lambda+1} B_{\lambda+1}^{-1} \times \cdots \times B_n Y_n B_n^{-1},$$

also $GVG^{-1} < \mathfrak{X}$, und die $\mathfrak{B}_\lambda$-Komponente von GVG^{-1} ist $B_\lambda U_\lambda B_\lambda^{-1} < \mathfrak{U}_\lambda$, also

$$GVG^{-1} < \mathfrak{V},$$
$$\mathfrak{V} <^i \mathfrak{G},$$

was zu beweisen war.

Korollar 1 zu Hilfssatz 3 und 4: *Es sei*

$$\mathfrak{G} < \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2 \times \cdots \times \mathfrak{B}_n;$$

die $\mathfrak{B}_\nu$ seien die Komponenten von $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{F}$ sei irgend ein Fuß von $\mathfrak{G}$. Es sei

$$\mathfrak{F} < \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 \times \cdots \times \mathfrak{F}_\nu,$$

wo $\mathfrak{F}_\nu$ die $\mathfrak{B}_\nu$-Komponente von $\mathfrak{F}$.

Behauptung: *$\mathfrak{F}_\nu$ ist Fuß von $\mathfrak{B}_\nu$.*

Beweis: Es ist $\mathfrak{F}_\nu <^i \mathfrak{B}_\nu$ nach Hilfssatz 3. Gäbe es nun ein $\mathfrak{U}_\nu$, für das

$$\mathfrak{U}_\nu <^i \mathfrak{B}_\nu, \quad \mathfrak{U}_\nu < \mathfrak{F}_\nu, \quad \mathfrak{E} \neq \mathfrak{U}_\nu \neq \mathfrak{F}_\nu,$$

so setze man

$$\mathfrak{V} = (\mathfrak{F}, \ \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 \times \cdots \times \mathfrak{F}_{\nu-1} \times \mathfrak{U}_\nu \times \mathfrak{F}_{\nu+1} \times \cdots \times \mathfrak{F}_n).$$

Es ist $\mathfrak{V} <^i \mathfrak{G}$ nach Hilfssatz 4, $\mathfrak{E} \neq \mathfrak{V} \neq \mathfrak{F}$, da die $\mathfrak{B}_\nu$-Komponente von $\mathfrak{V}$ der Bedingung $\mathfrak{E} \neq \mathfrak{U}_\nu \neq \mathfrak{F}_\nu$ genügte. Es wäre also $\mathfrak{F}$ kein Fuß von $\mathfrak{G}$ entgegen der Voraussetzung. Es muß also $\mathfrak{F}_\nu$ Fuß von $\mathfrak{B}_\nu$ sein.

Korollar 2 zu Hilfssatz 3 und 4: *Es sei $\mathfrak{S}$ der Sockel von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{S}_\nu$ der von $\mathfrak{B}_\nu$. Dann ist*

$$\mathfrak{S} < \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2 \times \cdots \times \mathfrak{S}_n.$$

Wegen $\mathfrak{S} < \mathfrak{G}$ kann man auch schreiben

$$\mathfrak{S} < (\mathfrak{G}, \ \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2 \times \cdots \times \mathfrak{S}_n).$$

Den Durchschnitt eines subdirekten Produktes mit einer Plenaruntergruppe seines Schreines wollen wir eine „supplenare Untergruppe" des subdirekten Produktes nennen. Der Sockel eines subdirekten Produktes ist also stets eine supplenare Untergruppe.

Hauptsatz 8: *Ist eine endliche Gruppe als ökonomisches subdirektes Produkt unzerlegbarer Faktoren dargestellt, so sind diese einfüßig, die einzigen Füße der Faktoren kommen in den Blockkomponenten vor; das direkte Produkt der Füße der Faktoren ist gleich dem Sockel der Gruppe; die Anzahl der unzerlegbaren Faktoren ist gleich dem Rang des Sockels.*

Beweis: Die unzerlegbaren Faktoren sind nach Satz 6 einfüßig; nach dem Korollar 1 zu Satz 7 sind die Blockkomponenten sämtlich $\neq \widehat{\mathfrak{E}}$ und enthalten den einzigen Fuß des Faktors. Es sei

$$\mathfrak{G} \asymp \widehat{\mathfrak{G}} < \widehat{\mathfrak{B}}_1 \times \widehat{\mathfrak{B}}_2 \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{B}}_n.$$

Es seien die $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ die einfüßigen subdirekten Faktoren, $\widehat{\mathfrak{C}}_\nu <^i \widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ die Blockkomponenten, $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu <^i \widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ der einzige Fuß von $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$, für $\nu = 1, 2, \cdots, n$, also $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu < \widehat{\mathfrak{C}}_\nu$.

Nach Korollar 2 zu Hilfssatz 1 und 2 ist $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu$ Fuß von $\widehat{\mathfrak{G}}$. Bezeichnet $\widehat{\mathfrak{S}}$ den Sockel von $\widehat{\mathfrak{G}}$, so ist also

$$\widehat{\mathfrak{F}}_1 \times \widehat{\mathfrak{F}}_2 \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{F}}_n < \widehat{\mathfrak{S}}. \tag{1}$$

Bezeichnet $\widehat{\mathfrak{S}}_\nu$ den Sockel von $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$, so ist $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu = \widehat{\mathfrak{S}}_\nu$. Mithin ist nach Korollar 2 zu Hilfssatz 3 und 4

$$\widehat{\mathfrak{S}} < \widehat{\mathfrak{F}}_1 \times \widehat{\mathfrak{F}}_2 \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{F}}_n.$$

Das liefert in Verbindung mit (1)

$$\widehat{\mathfrak{S}} = \widehat{\mathfrak{F}}_1 \times \widehat{\mathfrak{F}}_2 \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{F}}_n.$$

Es ist dies also eine Darstellung des Sockels als direktes Produkt geeignet gewählter Füße. Deren Anzahl ist nach MIU Satz 4 bei allen Zerlegungen dieselbe und war der „Rang" des Sockels genannt worden. Die Anzahl der unzerlegbaren subdirekten Faktoren einer Gruppe in einer ökonomischen Zerlegung ist also gleich dem Range des Sockels der Gruppe.

Damit sind sämtliche Behauptungen des Hauptsatzes 8 bewiesen.

§ 4. Über die Konstitution der einfüßigen Faktoren.

Hilfssatz 5: *Es sei*

$$\mathfrak{G} < \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2 \times \cdots \times \mathfrak{B}_n.$$

Die $\mathfrak{B}_n$ seien die Komponenten von $\mathfrak{G}$. Dann ist das Zentrum von $\mathfrak{G}$

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{G}) = (\mathfrak{G},\ \mathfrak{z}(\mathfrak{B}_1) \times \mathfrak{z}(\mathfrak{B}_2) \times \cdots \times \mathfrak{z}(\mathfrak{B}_n)).$$

Beweis: Wenn zwei Elemente vertauschbar sind, so sind auch ihre $\mathfrak{B}_\nu$-Komponenten vertauschbar. Ist also ein Element $< \mathfrak{z}(\mathfrak{G})$, d. h. mit allen Elementen von $\mathfrak{G}$ vertauschbar, so ist seine $\mathfrak{B}_\nu$-Komponente mit allen Elementen von $\mathfrak{B}_\nu$ vertauschbar, mithin $< \mathfrak{z}(\mathfrak{B}_\nu)$. Setzt man zur Abkürzung

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{B}_1) \times \mathfrak{z}(\mathfrak{B}_2) \times \cdots \times \mathfrak{z}(\mathfrak{B}_n) = \mathfrak{Z},$$

so ist also $\mathfrak{z}(\mathfrak{G}) < \mathfrak{Z}$; da $\mathfrak{z}(\mathfrak{G}) < \mathfrak{G}$, ist $\mathfrak{z}(\mathfrak{G}) < (\mathfrak{G}, \mathfrak{Z})$. Umgekehrt besitzt ein Element von $(\mathfrak{G}, \mathfrak{Z})$ lauter Komponenten, die mit allen Elementen aller $\mathfrak{B}_\nu$, also mit allen Elementen von $\mathfrak{G}$ vertauschbar sind, mithin $(\mathfrak{G}, \mathfrak{Z}) < \mathfrak{z}(\mathfrak{G})$, also

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{G}) = (\mathfrak{G}, \mathfrak{Z}).$$

Korollar zu Hilfssatz 5: Ist

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2 \times \cdots \times \mathfrak{B}_n,$$

so ist

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{z}(\mathfrak{B}_1) \times \mathfrak{z}(\mathfrak{B}_2) \times \cdots \times \mathfrak{z}(\mathfrak{B}_n) < \mathfrak{G},$$

also ist nach Hilfssatz 5

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{G}) = (\mathfrak{Z}, \mathfrak{G}) = \mathfrak{Z} = \mathfrak{z}(\mathfrak{B}_1) \times \mathfrak{z}(\mathfrak{B}_2) \times \cdots \times \mathfrak{z}(\mathfrak{B}_n).$$

Das Zentrum eines subdirekten Produktes ist also eine supplenare, das eines direkten Produktes eine plenare Untergruppe.

Hilfssatz 6: *Es sei*

$$\mathfrak{G} < \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2 \times \cdots \times \mathfrak{B}_n.$$

Die $\mathfrak{B}_\nu$ seien die Komponenten von $\mathfrak{G}$, es sei $\mathfrak{C}_\nu <_i \mathfrak{B}_\nu$ die ν-te Blockkomponente, für ein festes ν sei $\mathfrak{X} <_i \mathfrak{B}_\nu$, $\mathfrak{X} < \mathfrak{C}_\nu$.

Behauptung: $\mathfrak{X}$ erleidet die gleichen Automorphismen in $\mathfrak{G}$ und in $\mathfrak{B}_\nu$; jedes Element $G < \mathfrak{G}$ bewirkt in $\mathfrak{X}$ bei der Transformation den gleichen Automorphismus wie seine $\mathfrak{B}_\nu$-Komponente B_ν.

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus der Gleichung (2) im Beweise des Hilfssatzes 1. Es war für $X < \mathfrak{X}$

$$G X G^{-1} = B_\nu X B_\nu^{-1}.$$

Satz 9: *Es sei*

$$\mathfrak{G} \asymp \widehat{\mathfrak{G}} < \widehat{\mathfrak{B}}_1 \times \widehat{\mathfrak{B}}_2 \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{B}}_r$$

eine ökonomische Darstellung von $\mathfrak{G}$ *durch unzerlegbare subdirekte Faktoren. Es sei* $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu <_i \widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ *der einzige Fuß von* $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ *für* $\nu = 1, 2, \cdots, r$. *Dann ist* $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu$ *von gleicher* (*I., II., III.*) *Art in* $\widehat{\mathfrak{G}}$ *und in* $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ *und erleidet in* $\widehat{\mathfrak{G}}$ *und in* $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ *die gleichen Automorphismen.*

Beweis: Die Eigenschaft, kommutativ zu sein oder nicht, ist eine Eigenschaft des Fußes allein. Also ist $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu$, wenn nicht kommutativ, von III. Art sowohl in $\widehat{\mathfrak{G}}$ wie in $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$. Wenn $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu < \mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{B}}_\nu)$, so ist auch $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu < \mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{G}})$; wenn $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu < \mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{G}})$, so ist seine $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$-Komponente $< \mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{B}}_\nu)$; diese ist aber gleich $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu$ selber, mithin $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu < \mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{B}}_\nu)$. $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu$ ist also stets in $\widehat{\mathfrak{G}}$ und $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ gleichzeitig von I. Art. Es bleibt also übrig, daß $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu$ in $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ und in $\widehat{\mathfrak{G}}$ gleichzeitig von II. Art ist. $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu$ erleidet nach Hilfssatz 6 die gleichen Automorphismen in $\widehat{\mathfrak{G}}$ und in $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$.

Bestehen diese lediglich im identischen Automorphismus, so ist $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu$ elementweise vertauschbar mit den Elementen von $\widehat{\mathfrak{G}}$ bzw. $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$, also $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu < \mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{G}})$, $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu < \mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{B}}_\nu)$, $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu$ von I. Art in $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ und in $\widehat{\mathfrak{G}}$.

Man kann also die einfüßigen Faktoren nach der Art ihres einzigen Fußes als einfüßige Faktoren I., II., III. Art bezeichnen, ebenso einfüßige Faktoren als kohärent, wenn ihre Füße kohärent sind. Das Zeichen $\approx$ möge jedoch zunächst für die kohärente, also insbesondere isomorphe Zuordnung zwischen den Füßen, bzw. zwischen ihren Elementen vorbehalten bleiben.

Es sei $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ der einzige Fuß von $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu$, $\widehat{\mathfrak{M}}_\nu$ sei die Gruppe derjenigen Elemente von $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$, die mit allen Elementen von $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu$ vertauschbar sind.

Hilfssatz 7: *Es ist* $\widehat{\mathfrak{M}}_\nu <_i \widehat{\mathfrak{B}}_\nu$.

Beweis: Es sei

$$F < \widehat{\mathfrak{F}}_\nu, \quad M < \widehat{\mathfrak{M}}_\nu, \quad B < \widehat{\mathfrak{B}}_\nu.$$

Es ist

$$FM = MF;$$

$$BFB^{-1} \cdot BMB^{-1} = BFMB^{-1} = BMFB^{-1} = BMB^{-1} \cdot BFB^{-1}.$$

Es ist also BMB^{-1} vertauschbar mit allen BFB^{-1}, das sind aber alle Elemente von $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu$. Mithin $BMB^{-1} < \widehat{\mathfrak{M}}_\nu$, also $\widehat{\mathfrak{M}}_\nu <_i \widehat{\mathfrak{B}}$.

Hilfssatz 8: *Die Elemente von* $\widehat{\mathfrak{M}}_\nu$ *rufen bei der Transformation in* $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu$ *den identischen Automorphismus hervor.*

Beweis: Wenn $M < \widehat{\mathfrak{M}}_\nu$; $F < \widehat{\mathfrak{F}}_\nu$, so ist

$$MFM^{-1} = FMM^{-1} = F.$$

Hilfssatz 9: *Teilt man* $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ *nach* $\widehat{\mathfrak{M}}_\nu$ *als Faktorgruppe ein, so rufen zwei Elemente des gleichen Komplexes bei der Transformation den gleichen Automorphismus in* $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu$ *hervor.*

Beweis: Wenn

$$B < \widehat{\mathfrak{B}}_\nu, \; M < \widehat{\mathfrak{M}}_\nu, \; F < \widehat{\mathfrak{F}}_\nu,$$

so ist

$$(BM)F(BM)^{-1} = B \cdot MFM^{-1} \cdot B^{-1} = BFB^{-1}.$$

Hilfssatz 10: *Es sei* $B < \widehat{\mathfrak{B}}_\nu$, $BM' < \widehat{\mathfrak{B}}_\nu$; *wenn* B *und* BM' *bei der Transformation den gleichen Automorphismus in* $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu$ *hervorrufen, so ist* $M' < \widehat{\mathfrak{M}}_\nu$.

Beweis: Es soll für sämtliche $F < \widehat{\mathfrak{F}}_\nu$

$$BFB^{-1} = (BM') \cdot F \cdot (BM')^{-1} = B \cdot M'FM'^{-1} \cdot B^{-1}$$

sein, folglich

$$F = M'FM'^{-1},\ FM' = M'F.$$

Da dies für alle $F < \widehat{\mathfrak{F}}_\nu$ gilt, ist $M' < \widehat{\mathfrak{M}}_\nu$, was zu beweisen war.

Hilfssatz 11: $\frac{\widehat{\mathfrak{B}}_\nu}{\widehat{\mathfrak{M}}_\nu}$ *ist eineindeutig isomorph der Gruppe der durch* $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ *in* $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu$ *bewirkten Automorphismen.*

Beweis: Man schreibe den Automorphismus als Permutation der Elemente von $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu$. Es sei $F < \widehat{\mathfrak{F}}_\nu$, $B < \widehat{\mathfrak{B}}_\nu$, $B' < \widehat{\mathfrak{B}}_\nu$, dann ist

$$\begin{pmatrix} F \\ B^{-1}FB \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F \\ B'^{-1}FB' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ B^{-1}FB \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B^{-1}FB \\ B'^{-1} \cdot B^{-1}FB \cdot B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ (BB')^{-1}F(BB') \end{pmatrix}.$$

Es ist also die Gruppe $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ mehrstufig isomorph der Automorphismengruppe. Da zwei Elemente von $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$, die dem gleichen Komplex der Faktorgruppe $\frac{\widehat{\mathfrak{B}}_\nu}{\widehat{\mathfrak{M}}_\nu}$ angehören, denselben Automorphismus, solche die verschiedenen Komplexen angehören, verschiedene Automorphismen hervorrufen, so ist $\frac{\widehat{\mathfrak{B}}_\nu}{\widehat{\mathfrak{M}}_\nu}$ eineindeutig isomorph der Automorphismengruppe.

Ist $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu$ von I. Art, so ist $\widehat{\mathfrak{M}}_\nu = \widehat{\mathfrak{B}}_\nu$; ist $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu$ von II. Art, so ist $\widehat{\mathfrak{E}} \neq \widehat{\mathfrak{M}}_\nu \neq \widehat{\mathfrak{B}}_\nu$; wenn $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu$ von I. oder II. Art, so ist $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu < \widehat{\mathfrak{M}}_\nu$. Ist $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu$ von III. Art, so ist $\widehat{\mathfrak{M}}_\nu = \widehat{\mathfrak{E}}$; denn da kein Element von $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu$ außer $\widehat{E}$ mit allen Elementen von $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu$ vertauschbar ist, so müßte $\widehat{\mathfrak{M}}_\nu$ zu $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu$ teilerfremd sein; in $\widehat{\mathfrak{M}}_\nu$ wäre mindestens ein Fuß von $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ enthalten, der zu $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu$ teilerfremd wäre; also wäre $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu$ gegen die Voraussetzung nicht der einzige Fuß von $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$. Es muß also $\widehat{\mathfrak{M}}_\nu = \widehat{\mathfrak{E}}$ sein.

Es sei

$$\mathfrak{G} \asymp \widehat{\mathfrak{G}} < \widehat{\mathfrak{B}}_1 \times \widehat{\mathfrak{B}}_2 \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{B}}_r$$

eine ökonomische Darstellung von $\mathfrak{G}$ durch einfüßige subdirekte Faktoren. Es seien $\widehat{\mathfrak{B}}_1, \widehat{\mathfrak{B}}_2, \ldots, \widehat{\mathfrak{B}}_\varrho$ kohärente Faktoren. $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu$ sei der Fuß von $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$. Es sei

$$\widehat{\mathfrak{F}}_1 \approx \widehat{\mathfrak{F}}_2 \approx \cdots \approx \widehat{\mathfrak{F}}_\varrho$$

eine kohärente Zuordnung. Es sei $\widehat{\mathfrak{M}}_\nu$ die Untergruppe von $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ der mit jedem Element von $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu$ vertauschbaren Elemente. Die Gruppe der Automorphismen, die $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu$ in $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ erleidet, ist isomorph $\frac{\widehat{\mathfrak{B}}_\nu}{\widehat{\mathfrak{M}}_\nu}$ nach Hilfssatz 11.

Definition des Zeichens $\lesssim$: *Man ordne je zwei Komplexe von* $\frac{\widehat{\mathfrak{B}}_\mu}{\widehat{\mathfrak{M}}_\mu}$ *und* $\frac{\widehat{\mathfrak{B}}_\nu}{\widehat{\mathfrak{M}}_\nu}$ *einander zu, die in* $\widehat{\mathfrak{F}}_\mu$ *bzw.* $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu$ *einander zugeordnete Automorphismen bewirken, und bezeichne diese isomorphe Zuordnung mit*

$$\frac{\widehat{\mathfrak{B}}_\mu}{\widehat{\mathfrak{M}}_\mu} \lesssim \frac{\widehat{\mathfrak{B}}_\nu}{\widehat{\mathfrak{M}}_\nu}.$$

Es mögen die lateinischen Buchstaben Elemente der Gruppen mit entsprechenden deutschen Buchstaben bedeuten. Die Zuordnung $\nsim$ bedeutet ausführlich folgendes. Wenn

$$\widehat{F}_\mu \approx \widehat{F}_\nu \tag{1}$$

und

$$\widehat{B}_\mu \widehat{\mathfrak{M}}_\mu \nsim \widehat{B}_\nu \widehat{\mathfrak{M}}_\nu, \tag{2}$$

so ist

$$\widehat{B}_\mu \widehat{F}_\mu \widehat{B}_\mu^{-1} \approx \widehat{B}_\nu \widehat{F}_\nu \widehat{B}_\nu^{-1}. \tag{3}$$

Satz 10: *Es sei*

$$\mathfrak{G} \asymp \widehat{\mathfrak{G}} < \widehat{\mathfrak{B}}_1 \times \widehat{\mathfrak{B}}_2 \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{B}}_r$$

eine ökonomische Darstellung von $\mathfrak{G}$ durch subdirekte einfüßige Faktoren.

$$\widehat{G} = \widehat{B}_1 \times \widehat{B}_2 \times \cdots \times \widehat{B}_\varrho \times \cdots \times \widehat{B}_r < \widehat{\mathfrak{G}}$$

sei ein beliebiges Element von $\widehat{\mathfrak{G}}$; $\widehat{\mathfrak{B}}_1, \widehat{\mathfrak{B}}_2, \cdots, \widehat{\mathfrak{B}}_\varrho$ seien untereinander kohärente Faktoren. $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu$, $\widehat{\mathfrak{M}}_\nu$ mögen dieselbe Bedeutung haben wie oben. Dann ist

$$\widehat{B}_1 \widehat{\mathfrak{M}}_1 \nsim \widehat{B}_2 \widehat{\mathfrak{M}}_2 \nsim \cdots \nsim \widehat{B}_\varrho \widehat{\mathfrak{M}}_\varrho$$

oder, mit anderen Worten, die $\widehat{\mathfrak{B}}_1 \times \widehat{\mathfrak{B}}_2 \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{B}}_\varrho$-Komponente von $\widehat{\mathfrak{G}}$ ist eine Untergruppe des meromorphen Produktes

$$\frac{\widehat{\mathfrak{B}}_1}{\widehat{\mathfrak{M}}_1} \times \frac{\widehat{\mathfrak{B}}_2}{\widehat{\mathfrak{M}}_2} \times \cdots \times \frac{\widehat{\mathfrak{B}}_\varrho}{\widehat{\mathfrak{M}}_\varrho}, \tag{4}$$

Beweis: Es gibt einen Fuß $\widehat{\mathfrak{F}}$ von $\widehat{\mathfrak{G}}$, dessen Elemente durch Multiplikation der einander zugeordneten Komponenten aus den $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu$ entstehen, den man also schreiben kann

$$\widehat{\mathfrak{F}} = \frac{\widehat{\mathfrak{F}}_1}{\widehat{\mathfrak{E}}} \times \frac{\widehat{\mathfrak{F}}_2}{\widehat{\mathfrak{E}}} \times \cdots \times \frac{\widehat{\mathfrak{F}}_\varrho}{\widehat{\mathfrak{E}}}. \tag{5}$$

Es bedeuten die lateinischen Buchstaben Elemente der Gruppen mit den entsprechenden deutschen Buchstaben. Wenn

$$\widehat{F} = \widehat{F}_1 \times \widehat{F}_2 \times \cdots \times \widehat{F}_\varrho < \widehat{\mathfrak{F}} \tag{5 a}$$

ein beliebiges Element von $\widehat{\mathfrak{F}}$, so ist

$$\widehat{F}_1 \approx \widehat{F}_2 \approx \cdots \approx \widehat{F}_\varrho. \tag{6}$$

Bei der Transformation mit irgend einem Elemente $\widehat{G} < \widehat{\mathfrak{G}}$ muß $\widehat{F}$ wieder in ein Element von $\widehat{\mathfrak{F}}$ übergehen, $\widehat{G}\widehat{F}\widehat{G}^{-1} < \widehat{\mathfrak{F}}$. Es muß sein

$$\begin{cases} \widehat{G}\widehat{F}\widehat{G}^{-1} = \widehat{B}_1 \widehat{F}_1 \widehat{B}_1^{-1} \times \widehat{B}_2 \widehat{F}_2 \widehat{B}_2^{-1} \times \cdots \times \widehat{B}_\varrho \widehat{F}_\varrho \widehat{B}_\varrho^{-1} \\ \qquad \times \widehat{B}_{\varrho+1} \widehat{E} \widehat{B}_{\varrho+1}^{-1} \times \cdots \times \widehat{B}_r \widehat{E} \widehat{B}_r^{-1} < \widehat{\mathfrak{F}}'', \end{cases} \tag{7}$$

also

$$\widehat{B}_1 \widehat{F}_1 \widehat{B}_1^{-1} \approx \widehat{B}_2 \widehat{F}_2 \widehat{B}_2^{-1} \approx \cdots \approx \widehat{B}_\varrho \widehat{F}_\varrho \widehat{B}_\varrho^{-1}, \tag{8}$$

folglich

$$\widehat{B}_1 \widehat{\mathfrak{M}}_1 \nsim \widehat{B}_2 \widehat{\mathfrak{M}}_2 \nsim \cdots \nsim \widehat{B}_\varrho \widehat{\mathfrak{M}}_\varrho. \tag{9}$$

Wenn umgekehrt (9) erfüllt ist, so ist (8) und (7) erfüllt. Es gehören also alle $\widehat{\mathfrak{B}}_1 \times \widehat{\mathfrak{B}}_2 \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{B}}_\varrho$-Komponenten von $\widehat{\mathfrak{G}}$ dem meromorphen Produkt (4) an. Jede andere Zusammenstellung von Komponenten würde bei der Transformation die Kom-

ponenten eines Elementes $\widehat{F} < \widehat{\mathfrak{F}}$ nicht in die Komponenten eines und desselben Elementes von $\widehat{\mathfrak{F}}$ überführen.

Bemerkung zu Satz 10: Der Satz sagt nur etwas aus für Faktoren II. Art. Er ist trivial für Faktoren I. Art und inhaltlos für Faktoren III. Art.

Für Faktoren I. Art wird $\widehat{\mathfrak{M}}_\nu = \widehat{\mathfrak{B}}_\nu$. Das meromorphe Produkt wird gleich dem direkten Produkte der Komponenten $\widehat{\mathfrak{B}}_1 \times \widehat{\mathfrak{B}}_2 \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{B}}_\varrho$. Der Satz liefert also keine Einschränkung der möglichen Komponentenzusammenstellungen. Für Füße III. Art gibt es keine Kohärenz. Der Satz wird also für sie inhaltlos.

Umkehrung zu Satz 10: *Gegeben seien einfüßige Gruppen* $\widehat{\mathfrak{B}}_1, \widehat{\mathfrak{B}}_2, \cdots, \widehat{\mathfrak{B}}_\varrho$; $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu$ *sei der Fuß von* $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$, $\widehat{\mathfrak{M}}_\nu$ *die Untergruppe der mit jedem Elemente von* $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu$ *vertauschbaren Elemente von* $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$. *Die* $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu$ *seien von II. Art. Es sei eine isomorphe Zuordnung*

$$\widehat{\mathfrak{F}}_1 \approx \widehat{\mathfrak{F}}_2 \approx \cdots \approx \widehat{\mathfrak{F}}_\varrho \tag{10}$$

gegeben, ferner eine isomorphe Zuordnung

$$\frac{\widehat{\mathfrak{B}}_1}{\widehat{\mathfrak{M}}_1} \overset{\prime}{\approx} \frac{\widehat{\mathfrak{B}}_2}{\widehat{\mathfrak{M}}_2} \overset{\prime}{\approx} \cdots \overset{\prime}{\approx} \frac{\widehat{\mathfrak{B}}_\varrho}{\widehat{\mathfrak{M}}_\varrho} \tag{11}$$

derart, daß aus (1), (2) *in der Definition des Zeichens* $\overset{\prime}{\approx}$ *auch* (3) *folgt. Es genüge die Gruppe* $\widehat{\mathfrak{G}}$ *den Bedingungen*

$$\widehat{\mathfrak{F}}_1 \times \widehat{\mathfrak{F}}_2 \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{F}}_\varrho < \widehat{\mathfrak{G}} < \frac{\widehat{\mathfrak{B}}_1}{\widehat{\mathfrak{M}}_1} \times \frac{\widehat{\mathfrak{B}}_2}{\widehat{\mathfrak{M}}_2} \times \cdots \times \frac{\widehat{\mathfrak{B}}_\varrho}{\widehat{\mathfrak{M}}_\varrho}. \tag{12}$$

$\widehat{\mathfrak{B}}_1, \widehat{\mathfrak{B}}_2, \ldots, \widehat{\mathfrak{B}}_\varrho$ *seien die Komponenten von* $\widehat{\mathfrak{G}}$. *Dann sind* $\widehat{\mathfrak{F}}_1, \widehat{\mathfrak{F}}_2, \cdots, \widehat{\mathfrak{F}}_\varrho$ *in* $\widehat{\mathfrak{G}}$ *kohärente Füße.*

Vorbemerkung: Wenn die Beziehungen (10) (11) erfüllt sind, läßt sich jedenfalls das meromorphe Produkt auf der rechten Seite von (12) immer bilden und ist selbst ein brauchbares $\widehat{\mathfrak{G}}$.

Beweis: Es sei $\widehat{\mathfrak{F}}$ und $\widehat{F} < \widehat{\mathfrak{F}}$ durch (5), (5a) und (6) in Satz 10 definiert. Für jedes $\widehat{G} < \widehat{\mathfrak{G}}$,

$$\widehat{G} = \widehat{B}_1 \times \widehat{B}_2 \times \cdots \times \widehat{B}_\varrho$$

gilt dann (9), also folgt aus der Gleichung in (7) mit Rücksicht auf (1), (2), (3) die Gültigkeit von (8). Also ist

$$\widehat{G}\widehat{F}\widehat{G}^{-1} < \widehat{F}, \quad \widehat{\mathfrak{F}} <_i \widehat{\mathfrak{G}},$$

$\widehat{\mathfrak{F}}$ ist ein Fuß von $\widehat{\mathfrak{G}}$. Wäre nämlich $\widehat{\mathfrak{x}} <_i \widehat{\mathfrak{G}}$, $\widehat{\mathfrak{x}} < \widehat{\mathfrak{F}}$, $\widehat{\mathfrak{E}} \neq \widehat{\mathfrak{x}} \neq \widehat{\mathfrak{F}}$, so wäre $\widehat{\mathfrak{x}}_1$ die $\widehat{\mathfrak{B}}_1$-Komponente von $\widehat{\mathfrak{x}}$. Es wäre $\widehat{\mathfrak{x}}_1 \sim \widehat{\mathfrak{x}}$, also $\operatorname{Ord} \widehat{\mathfrak{x}}_1 = \operatorname{Ord} \widehat{\mathfrak{x}}$, $\widehat{\mathfrak{E}} \neq \widehat{\mathfrak{x}}_1 \neq \widehat{\mathfrak{F}}_1$. Andererseits wäre nach Hilfssatz 2 $\widehat{\mathfrak{x}}_1 <_i \widehat{\mathfrak{B}}_1$; also wäre $\widehat{\mathfrak{F}}_1$ gegen die Voraussetzung nicht Fuß von $\widehat{\mathfrak{B}}_1$. Mithin muß auch $\widehat{\mathfrak{F}}$ Fuß von $\widehat{\mathfrak{G}}$ sein. Die Füße $\widehat{\mathfrak{F}}_1, \widehat{\mathfrak{F}}_2, \cdots, \widehat{\mathfrak{F}}_\varrho$ können also gleichzeitig als Komponenten eines Fußes auftreten, sind also untereinander kohärent.

Korollar zur Umkehrung von Satz 10: Gelten die Beziehungen (1), (2), (3) nicht, stehen statt der Zeichen $\approx$ und $\overset{\prime}{\approx}$ nur einfache Isomorphismen, so braucht zwischen den Füßen keine Kohärenz zu bestehen.

Beispiel: Es sei $\varrho = 2$,

$$\mathfrak{B}_1 \sim \mathfrak{B}_2, \quad \mathfrak{F}_1 \sim \mathfrak{F}_2,$$

$\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ zyklisch von der Ordnung p, wo $p \geqq 5$ eine Primzahl sei, $F_1^p = E$. $\mathfrak{B}_1$ sei das Holomorph von $\mathfrak{F}_1$. Es ist bekanntlich

$$\operatorname{Ord} \mathfrak{B}_1 = p(p-1).$$

Die Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{F}_1}$ ist zyklisch. Ist $B_1\mathfrak{F}_1$ ein Basiskomplex dieser Faktorgruppe, so ist

$$B_1F_1B_1^{-1} = F_1^g,$$

wo g eine Primitivwurzel mod p. Ebenso ist

$$B_1F_1^{\mu}B_1^{-1} = F_1^{\mu g};$$

also ist g nur abhängig vom Element $\mathfrak{B}_1$; für alle Elemente von $\mathfrak{F}_1$, die $\neq E$, ist g dieselbe Primitivwurzel. $\mathfrak{B}_2$ ist von gleicher Konstitution. Man wähle als Basiselement von $\frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{F}_2}$ $B_2\mathfrak{F}_2$ so, daß

$$B_2F_2B_2^{-1} = F_2^k,$$

wo k eine von g verschiedene Primitivwurzel mod p. Damit zwei verschiedene Primitivwurzeln existieren, muß $p \geqq 5$ sein. Die Anzahl der Primitivwurzeln ist

$$\varphi(p-1), \qquad \{\varphi(3-1) = \varphi(2) = 1\}.$$

Man bilde das direkte Produkt $\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2$ und von diesem die Untergruppe $\mathfrak{G}$, deren Elemente den Komplexen $B_1^{\lambda}\mathfrak{F}_1 \times B_2^{\lambda}\mathfrak{F}_2$ angehören. λ ist mod $p-1$ bestimmt. Es ist dies ein meromorphes Produkt

$$\mathfrak{G} = \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{F}_1} \asymp \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{F}_2}.$$

$\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ sind einfüßig. Die Darstellung ist ökonomisch, da die Blockkomponenten $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2 \neq \mathfrak{E}$. Also ist der Sockel von $\mathfrak{G}$ gleich $\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$. Es soll gezeigt werden, daß die Füße $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ inkohärent sind, d. h. daß es keinen Fuß $\mathfrak{F} < \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$ gibt, der Komponenten sowohl aus $\mathfrak{F}_1$ wie aus $\mathfrak{F}_2$ besitzt.

Beweis: Es sei $\mathfrak{F} < \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$, also $\mathfrak{F}$ zyklisch von der Ordnung p. Es sei $F = F_1 \times F_2$ ein Basiselement von $\mathfrak{F}$. Sämtliche Elemente von $\mathfrak{F}$ haben die Form

$$F^{\mu} = F_1^{\mu} \times F_2^{\mu}, \quad \text{wo} \quad \mu = 0, 1, 2, \ldots, p-1.$$

Es sei $G = B_1 \times B_2$. Dann ist

$$GFG^{-1} = B_1F_1B_1^{-1} \times B_2F_2B_2^{-1} = F_1^g \times F_2^k,$$

Dies Element kommt aber nicht in $\mathfrak{F}$ vor. Denn jede Potenz von F_1 ist nur Komponente eines einzigen Elementes von $\mathfrak{F}$. Da

$$F_1^g \times F_2^g = F^g < \mathfrak{F},$$

kann, wegen $k \neq g$, $F_1^k \times F_2^g$ nicht in $\mathfrak{F}$ enthalten sein. Also kann es keine invariante Untergruppe $\mathfrak{F}$ geben, die von $\mathfrak{E}$ verschiedene Komponenten aus $\mathfrak{F}_1$ und aus $\mathfrak{F}_2$ besitzt. Ist andererseits $k = g$, so ist

$$GFG^{-1} = F_1^g \times F_2^g = F^g < \mathfrak{F},$$

also $\mathfrak{F} <^i \mathfrak{G}$. Wenn $k = g$, gilt diese Herleitung für sämtliche zyklischen Untergruppen von $\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$. Es sind $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ kohärent.

Um aus *einer* kohärenten Zuordnung von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ sämtliche kohärenten Zuordnungen und so sämtliche Füße zu finden, hatte man nach MIU § 3 in der Gruppe aller Automorphismen des Fußes $\mathfrak{A}_a$ die Gruppe derjenigen Automorphismen $\mathfrak{A}_b$ zu suchen, die mit sämtlichen Automorphismen der gegebenen Automorphismengruppe $\mathfrak{A}_g$ vertauschbar sind. In diesem einfachsten Falle ist $\mathfrak{A}_g = \mathfrak{A}_a$, und $\mathfrak{A}_a$ ist zyklisch von der Ordnung $p-1$, also kommutativ, mithin ist auch $\mathfrak{A}_b = \mathfrak{A}_a$. Es sind also sämtliche überhaupt möglichen Automorphismen von $\mathfrak{F}_2$ bei der Zuordnung zu $\mathfrak{F}_1$ zulässig.

Es sind hier somit *sämtliche* Untergruppen von $\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$ invariant in $\mathfrak{G}$. Das ist *nur* in diesem einfachsten bekannten Falle richtig, da die Gruppe sämtlicher Automorphismen noch kommutativ ist.

Hauptsatz 11: *Einfüßige subdirekte Faktoren III. Art sind Automorphismengruppen ihres Fußes.*

Beweis: Es sei $\mathfrak{B}_1$ ein einfüßiger Faktor III. Art, $\mathfrak{F}_1$ der einzige Fuß von $\mathfrak{B}_1$. Die Untergruppe von $\mathfrak{B}_1$ der mit jedem Element von $\mathfrak{F}_1$ vertauschbaren Elemente war $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{E}$; also ist die Gruppe der Automorphismen, die $\mathfrak{F}_1$ in $\mathfrak{B}_1$ erleidet, nach Hilfssatz 11 isomorph $\frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{M}_1} \sim \mathfrak{B}_1$. Mithin ist $\mathfrak{B}_1$ isomorph einer Automorphismengruppe von $\mathfrak{F}_1$, was zu beweisen war.

Die Konstitution dieser Automorphismengruppen ist in MIU § 6 eingehend behandelt worden. Vor allem folgt daraus, daß, wenn ein Fuß III. Art gegeben ist, der Faktor III. Art nur einer Untergruppe der Gruppe aller Automorphismen isomorph sein kann, also in seiner Ordnung beschränkt ist.

Eine solche Beschränkung der Ordnung besteht für Faktoren I. und II. Art nicht.

Ein kommutativer einfüßiger subdirekter Faktor ist zyklisch von Primzahlpotenzordnung, da alle anderen kommutativen Gruppen sogar direkt, also subdirekt, zerlegbar sind. Wenn p die Ordnung des Fußes ist, kann die Ordnung des Faktors p^α noch beliebig groß sein. Ein einfüßiger subdirekter Faktor I. Art hat aus dem gleichen Grunde stets ein Zentrum, das zyklisch und von Primzahlpotenzordnung ist, da alle anderen Zentren mehrere Füße besitzen würden. Ist ein einfüßiger Faktor $\mathfrak{B}$ von I. Art mit dem Fuß $\mathfrak{F}$ nicht kommutativ, und ist $\mathfrak{K}$ der Kommutator von $\mathfrak{B}$, so ist $\mathfrak{K} \neq \mathfrak{E}$, $\mathfrak{K} <_i \mathfrak{B}$, also $\mathfrak{F} < \mathfrak{K}$.

Um zu zeigen, daß auch durch einen Fuß II. Art die Ordnung des einfüßigen Faktors nicht beschränkt ist, soll das Holomorph einer regulären kommutativen Gruppe betrachtet werden.

Definition: *Eine kommutative Gruppe*

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \cdots \times \mathfrak{A}_\delta$$

heiße regulär, wenn ihre sämtlichen zyklischen direkten Faktoren $\mathfrak{A}_\nu$ von der gleichen Primzahlpotenzordnung p^α sind.

Hilfssatz 12: *In einer regulären kommutativen Gruppe ist jedes Element Potenz eines Elementes der höchsten Ordnung.*

Beweis: Es mögen $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{A}_\nu$, δ, p^α die obige Bedeutung haben; A_ν sei ein Basiselement von $\mathfrak{A}_\nu$.

$$N = A_1^{p^\nu n_1} \times A_2^{p^\nu n_2} \times \cdots \times A_\delta^{p^\nu n_\delta}$$

sei die Darstellung irgend eines Elementes $N < \mathfrak{N}$. Hierin sei p^ν die höchste Potenz von p, die in sämtlichen Exponenten aufgeht, so daß die Faktoren $n_1, n_2, \ldots, n_\delta$ nicht sämtlich durch p teilbar sind. Dann ist

$$N = (A_1^{n_1} \times A_2^{n_2} \times \cdots \times A_\delta^{n_\delta})^{p^\nu} = N'^{p^\nu}.$$

Es sei z. B. $(n_1, p) = 1$; dann ist N' von der Ordnung p^α, weil für keine kleinere Potenz $A_1^{n_1 a'}$ der Exponent $n_1 a'$ durch p^α teilbar sein kann.

Das *Holomorph* einer Gruppe $\mathfrak{N}$ wird folgendermaßen gebildet [10]):

Man schreibe $\mathfrak{N}$ als Permutationsgruppe $\begin{pmatrix} X \\ XN \end{pmatrix}$, worin das Symbol X sämtliche

[10]) Siehe *Speiser*, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, Berlin 1923, S. 76, oder 2. Aufl. 1927, S. 122.

Elemente von $\mathfrak{N}$ durchläuft und N ein Element von $\mathfrak{N}$ bedeutet, das für eine feste Permutation festgehalten wird. XN bedeute, daß das Element XN als einfaches Symbol geschrieben wird. Ebenso schreibe man die Gruppe sämtlicher Automorphismen $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{N}$ als Permutationsgruppe $\begin{pmatrix} X \\ X' \end{pmatrix}$, wo X alle Elemente von $\mathfrak{N}$ durchläuft, X' das X vermöge des Automorphismus entsprechende Element ist. Die aus den Permutationsgruppen $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{A}$ erzeugte Permutationsgruppe $\mathfrak{L}$ heiße das „Holomorph" von $\mathfrak{N}$. In Satz 78 des Lehrbuchs von *Speiser* [10]) (in der 2. Auflage Satz 107) wird gezeigt, daß sämtliche mit $\mathfrak{N}$ elementweise vertauschbaren Permutationen von der Form $\begin{pmatrix} X \\ NX \end{pmatrix}$ sind, wo $N < \mathfrak{N}$. Diese bilden eine Gruppe $\overline{\mathfrak{N}}$. Die Hilfssätze 7 bis 11 gelten, wenn $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu <^i \widehat{\mathfrak{B}}_\nu$. Von der Fußeigenschaft von $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu$ ist kein Gebrauch gemacht. Nach Hilfssatz 11 ist

$$\mathfrak{A} \sim \frac{\mathfrak{L}}{\overline{\mathfrak{N}}}.$$

Bezeichnen $a, n = \bar{n}, l$ die Ordnungen von $\mathfrak{A}, \mathfrak{N}, \overline{\mathfrak{N}}, \mathfrak{L}$, so ist

$$an = l.$$

Wenn $\mathfrak{N}$ kommutativ ist, ist $NX = XN$, also $\overline{\mathfrak{N}} = \mathfrak{N}$. Es gibt mithin in $\mathfrak{L}$ außer den Elementen von $\mathfrak{N}$ keine anderen, die mit allen Elementen von $\mathfrak{N}$ vertauschbar sind.

Satz 12: *Es sei*

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \cdots \times \mathfrak{A}_\delta$$

eine reguläre kommutative Gruppe, deren Faktoren $\mathfrak{A}_\nu$ sämtlich von der Ordnung p^α sind. Wenn $\mathfrak{L}$ das Holomorph von $\mathfrak{N}$ ist, so ist der Sockel $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{N}$, dessen Ordnung p^δ, der einzige Fuß von $\mathfrak{L}$.

Beweis: Jede Untergruppe $\mathfrak{X} < \mathfrak{F}$ von der Ordnung p^ξ kann bei einer geeigneten Zerlegung von $\mathfrak{F}$ als direktes Teilprodukt auftreten. Es sei

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$$
$$= \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2 \times \cdots \times \mathfrak{H}_\xi \times \mathfrak{H}_{\xi+1} \times \cdots \times \mathfrak{H}_\delta,$$

wo die $\mathfrak{H}_\nu$ von der Ordnung p,

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2 \times \cdots \times \mathfrak{H}_\xi.$$

H_ν sei ein Basiselement von $\mathfrak{H}_\nu$. Nach Hilfssatz 12 ist

$$H_\nu = A_\nu^{p^{\alpha-1}},$$

wo A_ν ein passend gewähltes Element. Es wird behauptet, daß die $A_1, A_2, \ldots, A_\delta$ eine Basis von $\mathfrak{N}$ bilden. Angenommen, das sei nicht der Fall, so gibt es eine Relation,

$$A_1^{b_1} A_2^{b_2} \cdots A_\delta^{b_\delta} = E,$$

in der nicht sämtliche Exponenten durch p^α teilbar sind. Die höchste Potenz von p, die in sämtlichen b_ν aufgeht, sei p^β. Es sei $b_\nu = p^\beta m_\nu$. Es sind also nicht sämtliche m_ν durch p teilbar. Man erhebe die letzte Gleichung in die Potenz $p^{\alpha-\beta-1}$. Es ergibt sich

$$H_1^{m_1} H_2^{m_2} \cdots H_\delta^{m_\delta} = E.$$

Das widerspricht aber der Voraussetzung, daß die H_ν eine Basis von $\mathfrak{F}$ bilden. Mithin ist die Annahme, daß die A_ν keine Basis von $\mathfrak{N}$ bilden, widerlegt. Die A_ν bilden eine Basis von $\mathfrak{N}$. Ist $\mathfrak{X}' < \mathfrak{F}$ ebenfalls von der Ordnung p^ξ, so bilde man eine zweite Basis auf die gleiche Weise unter Berücksichtigung von $\mathfrak{X}'$. Ordnet man die beiden Basen einander zu, so erhält man einen Automorphismus von $\mathfrak{N}$, bei dem $\mathfrak{X}$ in $\mathfrak{X}'$ übergeht.

Keine echte Untergruppe von $\mathfrak{F}$ bleibt also in $\mathfrak{L}$ invariant ($\mathfrak{F}$ besitzt keine in $\mathfrak{N}$ charakteristische Untergruppe außer $\mathfrak{E}$), also ist $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{L}$ minimale invariante Untergruppe oder Fuß von $\mathfrak{L}$.

Es soll gezeigt werden, daß $\mathfrak{L}$ keinen weiteren Fuß außer $\mathfrak{F}$ besitzt. Zunächst nehmen wir an, es enthalte $\mathfrak{N}$ noch einen weiteren Fuß $\mathfrak{F}'$ von $\mathfrak{L}$. Da $\mathfrak{N}$ kommutativ, wäre $\mathfrak{F}'$ kommutativ, also von I. oder von II. Art, also wären seine Elemente außer E von der Ordnung p. Da aber $\mathfrak{F}$ bereits sämtliche Elemente von $\mathfrak{N}$ von der Ordnung p enthält, ist $\mathfrak{F}' < \mathfrak{F}$, also $\mathfrak{F}' = \mathfrak{F}$.

Ein von $\mathfrak{F}$ verschiedener Fuß $\mathfrak{F}'$ von $\mathfrak{L}$ wäre also nicht in $\mathfrak{N}$ enthalten, mithin zu $\mathfrak{N}$ teilerfremd. Die Elemente von $\mathfrak{F}'$ wären also mit allen Elementen von $\mathfrak{N}$ vertauschbar und außer E nicht in $\mathfrak{N}$ enthalten; solche Elemente gibt es aber nicht nach dem oben Bemerkten. Also kann ein von $\mathfrak{F}$ verschiedener Fuß $\mathfrak{F}'$ nicht in $\mathfrak{L}$ existieren. $\mathfrak{L}$ ist einfüßig. Der einzige Fuß $\mathfrak{F}$ ist in $\mathfrak{L}$ von II. Art.

Korollar zu Satz 12: Da bei vorgegebenem p^δ in Satz 12 α beliebig groß sein kann, existiert für einfüßige Faktoren II. Art mit vorgegebener Ordnung des Fußes *keine Beschränkung der Ordnung.*

Hilfssatz 13: *Es sei* $\mathfrak{M} <_i \mathfrak{B}$, $\mathfrak{F}$ *Fuß von* $\mathfrak{M}$, $B < \mathfrak{B}$,

$$B\mathfrak{F}B^{-1} = \mathfrak{F}'.$$

Behauptung: $\mathfrak{F}'$ *ist ebenfalls Fuß von* $\mathfrak{M}$ *und zwar von derselben Art wie* $\mathfrak{F}$.

Beweis: Es ist $\mathfrak{F}' <_i \mathfrak{M}$. Angenommen, $\mathfrak{F}'$ wäre nicht Fuß von $\mathfrak{M}$, dann gäbe es

$$\mathfrak{x}' <_i \mathfrak{M}, \quad \mathfrak{x}' < \mathfrak{F}', \quad \mathfrak{E} \neq \mathfrak{x}' \neq \mathfrak{F}'.$$

Dann wäre auch

$$B^{-1}\mathfrak{x}'B = \mathfrak{x} <_i B^{-1}\mathfrak{M}B = \mathfrak{M},$$
$$\mathfrak{x} < B^{-1}\mathfrak{F}'B = B^{-1}B\mathfrak{F}B^{-1}B = \mathfrak{F},$$
$$\mathfrak{E} = B^{-1}\mathfrak{E}B \neq B^{-1}\mathfrak{x}'B = \mathfrak{x} \neq B^{-1}\mathfrak{F}'B = \mathfrak{F},$$

also

$$\mathfrak{x} <_i \mathfrak{M}, \quad \mathfrak{x} < \mathfrak{F}, \quad \mathfrak{E} \neq \mathfrak{x} \neq \mathfrak{F}.$$

Folglich wäre $\mathfrak{F}$ nicht Fuß von $\mathfrak{M}$ entgegen der Voraussetzung. Es muß mithin auch $\mathfrak{F}'$ Fuß von $\mathfrak{M}$ sein.

Es ist $\mathfrak{F}' \sim \mathfrak{F}$. Wenn $\mathfrak{F}$ nicht kommutativ, ist auch $\mathfrak{F}'$ nicht kommutativ, also beide von III. Art. Wenn $\mathfrak{F} < \mathfrak{z}(\mathfrak{M})$, so ist für jedes $F < \mathfrak{F}$, $M < \mathfrak{M}$,

$$FM = MF$$

mithin auch

$$BFB^{-1} \cdot BMB^{-1} = B \cdot FM \cdot B^{-1} = B \cdot MF \cdot B^{-1} = BMB^{-1} \cdot BFB^{-1}.$$

Wenn man also setzt

$$BFB^{-1} = F' < \mathfrak{F}', \quad BMB^{-1} = M' < \mathfrak{M},$$

so erhält man

$$F'M' = M'F'.$$

Da man so sämtliche Elemente von $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{M}$ erhält, so ist $\mathfrak{F}' < \mathfrak{z}(\mathfrak{M})$, d. h. $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}'$ sind gleichzeitig von I. Art in $\mathfrak{M}$. Es bleibt also, wenn $\mathfrak{F}$ kommutativ, aber nicht in $\mathfrak{z}(\mathfrak{M})$ enthalten, daß dasselbe von $\mathfrak{F}'$ gilt; also sind $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}'$ auch gleichzeitig von II. Art in $\mathfrak{M}$.

Satz 13: *Es sei* $\mathfrak{F} <_i \mathfrak{B}$ *der einzige Fuß von* $\mathfrak{B}$, *und zwar sei* $\mathfrak{F}$ *von II. Art von der Ordnung* p^δ; *es sei* $\mathfrak{M}$ *die Gruppe der Elemente von* $\mathfrak{B}$, *die mit sämtlichen Elementen von* $\mathfrak{F}$ *vertauschbar sind.*

Behauptung: $\mathfrak{M}$ *hat nur Füße I. Art von der Ordnung* p.

Beweis: Es ist $\mathfrak{F} < \mathfrak{z}(\mathfrak{M})$. Die Hufe $\mathfrak{H}_\nu$ von $\mathfrak{B}$, die sämtlich in $\mathfrak{F}$ enthalten sind, sind also Füße I. Art von $\mathfrak{M}$. Es war $\mathfrak{M} <_i \mathfrak{B}$ nach Hilfssatz 7. Es sei $\mathfrak{H}_1'$ ein Fuß von $\mathfrak{M}$, der nicht kohärent zu den $\mathfrak{H}_\nu$ sei; d. h. es sei $\mathfrak{H}_1'$ von II. oder III. Art in $\mathfrak{M}$ oder von I. Art von der Primzahlordnung q, wo $q \neq p$. Es seien $\mathfrak{H}_2', \mathfrak{H}_3', \ldots, \mathfrak{H}_r'$ die sämtlichen zu $\mathfrak{H}_1'$ in $\mathfrak{B}$ konjugierten Untergruppen; diese sind ebenfalls Füße in $\mathfrak{M}$, ihre Art und ihre Ordnung ist dieselbe wie die von $\mathfrak{H}_1'$ nach Hilfssatz 13. Sie gehören also ebenfalls anderen Kohärenten in $\mathfrak{M}$ an als die $\mathfrak{H}_\nu$. Das Produkt $\mathfrak{Q} = \mathfrak{H}_1' \mathfrak{H}_2' \cdots \mathfrak{H}_r'$ ist invariant in $\mathfrak{M}$ und, da es dem Produkte der von den $\mathfrak{H}_\nu$ verschiedenen Kohärenten in $\mathfrak{M}$ angehört, ist $(\mathfrak{Q}, \mathfrak{F}) = \mathfrak{E}$. Es ist auch $\mathfrak{Q} <_i \mathfrak{B}$. Wenn $\mathfrak{P} < \mathfrak{Q}$, $\mathfrak{P}$ Fuß von $\mathfrak{B}$, so ist auch $(\mathfrak{P}, \mathfrak{F}) = \mathfrak{E}$. Das würde der Voraussetzung widersprechen, daß $\mathfrak{B}$ einfüßig ist. Es kann also $\mathfrak{M}$ keine Füße enthalten, die zu den $\mathfrak{H}_\nu$ nicht kohärent sind; also sind sämtliche Füße von $\mathfrak{M}$ von I. Art und von der Ordnung p.

Eine Gruppe, deren sämtliche Füße untereinander kohärent sind, heiße „Kohärenzgruppe", analog „Kohärenzfaktor".

$\mathfrak{M}$ ist also hiernach eine Kohärenzgruppe I. Art.

Der folgende Paragraph handelt von Eigenschaften der Kohärenzgruppen I. Art.

§ 5. Das Hyperzentrum.

Der folgende Hilfssatz 14 mit seinen Korollaren gibt eine einfache Bestimmung der Faktorgruppe nach einer invarianten Supplenaruntergruppe eines subdirekten Produktes, ebenso als Spezialfall nach einer invarianten Plenaruntergruppe eines direkten Produktes.

Hilfssatz 14: *Es sei* $\mathfrak{G} < \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2 \times \cdots \times \mathfrak{B}_n$ *ein subdirektes Produkt, die* $\mathfrak{B}_\nu$ *seien die Komponenten von* $\mathfrak{G}$. *Es sei*

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{L}_\nu <_i \mathfrak{B}_\nu \\ \dfrac{\mathfrak{B}_\nu}{\mathfrak{L}_\nu} \overset{\sim}{\nu} \overline{\mathfrak{B}}_\nu \end{array}\right\} \quad \text{für } \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Es sei ferner $B_\nu < \mathfrak{B}_\nu$, $B\,\mathfrak{L}_\nu \overset{\sim}{\nu} \overline{B}_\nu$, *worin* $\overline{B}_\nu < \overline{\mathfrak{B}}_\nu$. *Man ordne jedem Element* $G < \mathfrak{G}$ *dasjenige Element des (durch Nebeneinanderschreiben der Komponenten gebildeten) direkten Produktes* $\overline{\mathfrak{B}}_1 \times \overline{\mathfrak{B}}_2 \times \cdots \times \overline{\mathfrak{B}}_n$ *zu, das entsteht, wenn man jede Komponente* B_ν *durch die zugeordnete* $\overline{B}_\nu$ *ersetzt. Es entsteht ein subdirektes Produkt*

$$\overline{\mathfrak{G}} < \overline{\mathfrak{B}}_1 \times \overline{\mathfrak{B}}_2 \times \cdots \times \overline{\mathfrak{B}}_n.$$

Man setze zur Abkürzung

$$(\mathfrak{L}_1 \times \mathfrak{L}_2 \times \cdots \times \mathfrak{L}_n\,, \mathfrak{G}) = \mathfrak{P}.$$

Behauptung:

$$\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{P}} \sim \overline{\mathfrak{G}}.$$

Beweis: Es soll gezeigt werden, daß die Zuordnung ein Homomorphismus ist, d. h. daß, wenn $G \to \overline{G}$ und $G' \to \overline{G}'$, dann auch $GG' \to \overline{G}\overline{G}'$ ist. Es sei

$$G = B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_n \to \overline{B}_1 \times \overline{B}_2 \times \cdots \times \overline{B}_n = \overline{G},$$

ebenso

$$G' = B_1' \times B_2' \times \cdots \times B_n' \to \overline{B}_1' \times \overline{B}_2' \times \cdots \times \overline{B}_n' = \overline{G}',$$

mithin

$$GG' = B_1 B_1' \times B_2 B_2' \times \cdots \times B_n B_n' \to \overline{B}_1 \overline{B}_1' \times \overline{B}_2 \overline{B}_2' \times \cdots \times \overline{B}_n \overline{B}_n' = \overline{G}\overline{G}',$$

weil

$$B_\nu B'_\nu \cdot \mathfrak{L}_\nu = B_\nu \mathfrak{L}_\nu \cdot B'_\nu \mathfrak{L}_\nu \overset{\sim}{\nu} \overline{B}_\nu \overline{B}'_\nu;$$

also

$$\mathfrak{G} \to \overline{\mathfrak{G}}.$$

Der Homomorphismus wird im allgemeinen mehrstufig sein. Dem Einheitselemente $\overline{E}$ entsprechen diejenigen Elemente, für die eine jede Komponente B_ν dem Einheitskomplex der Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{B}_\nu}{\mathfrak{L}_\nu}$ angehört, für die also $B_\nu < \mathfrak{L}_\nu$. Es handelt sich mithin um die Elemente von $\mathfrak{P}$. Folglich ist $\mathfrak{P} <_i \mathfrak{G}$, und der Isomorphismus

$$\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{P}} \sim \overline{\mathfrak{G}}$$

ist ein einstufiger.

Korollar 1 *zu Hilfssatz* 14: Es sei $\mathfrak{G}$ ein direktes Produkt.

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2 \times \cdots \times \mathfrak{B}_n.$$

$$\frac{\mathfrak{B}_\nu}{\mathfrak{L}_\nu} \overset{\sim}{\nu} \overline{\mathfrak{B}}_\nu.$$

Da alle Komponentenverbindungen vorkommen, ist auch $\overline{\mathfrak{G}}$ ein direktes Produkt:

$$\overline{\mathfrak{G}} = \overline{\mathfrak{B}}_1 \times \overline{\mathfrak{B}}_2 \times \cdots \times \overline{\mathfrak{B}}_n,$$
$$\mathfrak{P} = \mathfrak{L}_1 \times \mathfrak{L}_2 \times \cdots \times \mathfrak{L}_n < \mathfrak{G}.$$

Also liefert Hilfssatz 14, den man auch gleich für diesen speziellen Fall hätte ansetzen können,

$$\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{P}} \sim \overline{\mathfrak{G}}.$$

Korollar 2 *zu Hilfssatz* 14: Eine Supplenaruntergruppe eines subdirekten Produktes ist dann und nur dann invariante Untergruppe, wenn ihre Komponenten invariante Untergruppen der Komponenten des subdirekten Produktes sind. Analoges gilt für Plenaruntergruppen direkter Produkte.

Hilfssatz 15: *Es sei* $\mathfrak{P}$ *von Primzahlpotenzordnung*, $\mathfrak{Q} <_i \mathfrak{P}$.

Behauptung: $\mathfrak{Q}$ *enthält außer* E *noch weitere invariante Elemente von* $\mathfrak{P}$ [11]).

Beweis: Es sei $\mathfrak{Q}$ von der Ordnung p^β. Als invariante Untergruppe besteht $\mathfrak{Q}$ aus vollen Klassen konjugierter Elemente von $\mathfrak{P}$. Deren Ordnungen seien

$$h_1 + h_2 + \cdots + h_s = p^\beta.$$

Die Ordnungen der h_σ gehen in der Ordnung von $\mathfrak{P}$ auf, sind also 1 oder durch p teilbar. Da für die Klasse des Einheitselementes $h_1 = 1$, so müssen noch weitere $h_\sigma = 1$ sein, weil man andernfalls mod p die Kongruenz $1 + 0 \equiv 0$ erhielte, was nicht sein kann. Es enthält mithin jede invariante Untergruppe von $\mathfrak{P}$ außer E noch andere invariante Elemente von $\mathfrak{P}$.

Korollar zu Hilfssatz 15 (bekannter Satz): *Eine Gruppe von Primzahlpotenzordnung kann nur Füße I. Art enthalten.*

Beweis: Ein Fuß II. oder III. Art wäre zum Zentrum der Gruppe teilerfremd, was Hilfssatz 15 widersprechen würde.

Es sei $\mathfrak{G}$ eine Gruppe. Man bilde die Faktorgruppe nach dem Zentrum, in dieser wieder die Faktorgruppe nach dem Zentrum, und so fort.

$$\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{z}(\mathfrak{G}),\ \frac{\mathfrak{Z}_2}{\mathfrak{Z}_1} = \mathfrak{z}\left(\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{Z}_1}\right),\ \text{allgemein}\ \frac{\mathfrak{Z}_\nu}{\mathfrak{Z}_{\nu-1}} = \mathfrak{z}\left(\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{Z}_{\nu-1}}\right).$$

[11]) Siehe Speiser l. c. S. 45, Satz 50, oder 2. Aufl. S. 69, Satz 78.

Das Verfahren läßt sich an sich beliebig oft wiederholen. Da $\mathfrak{Z}_{\nu-1} < \mathfrak{Z}_\nu$, können die Ordnungen nicht abnehmen. Da $\mathfrak{G}$ nur endlich viele invariante Untergruppen enthält, muß einmal der Fall eintreten, daß

$$\frac{\mathfrak{Z}_s}{\mathfrak{Z}_s} = \frac{\mathfrak{Z}_{s-1}}{\mathfrak{Z}_s} = \mathfrak{z}\left(\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{Z}_s}\right) \quad \text{oder} \quad \mathfrak{Z}_s = \mathfrak{Z}_{s-1}.$$

D. h. die Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{Z}_s}$ enthält außer dem Einheitselement keine invarianten Elemente mehr. Von hier an sind alle folgenden Glieder der Reihe einander gleich

$$\mathfrak{Z}_s = \mathfrak{Z}_{s+1} = \mathfrak{Z}_{s+2} = \cdots.$$

Wir wollen sagen, daß das Verfahren an der Stelle $\mathfrak{Z}_s$ zum Stillstand kommt, wenn die Fortsetzung der Reihe keine neuen invarianten Untergruppen von $\mathfrak{G}$ mehr liefert. Es möge das letzte Glied der Reihe $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Z}_s$ das „Hyperzentrum" von $\mathfrak{G}$ heißen; es möge auch $\mathfrak{Y} = \mathfrak{y}(\mathfrak{G})$ geschrieben werden.

Ist $\mathfrak{G}$ von Primzahlpotenzordnung, so ist $\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{z}(\mathfrak{G}) \neq \mathfrak{E}$ nach Hilfssatz 15, ebenso erhält man $\mathfrak{Z}_\nu \neq \mathfrak{Z}_{\nu-1}$, so lange $\operatorname{Ord} \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{Z}_{\nu-1}} > 1$. Die Reihe kann also nur dadurch zum Stillstand kommen, daß $\mathfrak{Y} = \mathfrak{G}$. Eine Gruppe, die der Bedingung $\mathfrak{y}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}$ genügt, möge „hyperkommutativ" heißen.

Hilfssatz 16: *Ein direktes Produkt von Gruppen von Primzahlpotenzordnung ist hyperkommutativ.*

Beweis: Es sei

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{P} \times \mathfrak{Q} \times \mathfrak{R} \times \cdots,$$

wo die Ordnungen von $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}, \ldots$ bzw. $p^\alpha, q^\beta, r^\gamma, \ldots$ Potenzen verschiedener Primzahlen seien. Es ist nach dem Korollar zu Hilfssatz 5

$$\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{z}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{P}) \times \mathfrak{z}(\mathfrak{Q}) \times \mathfrak{z}(\mathfrak{R}) \times \cdots.$$

Setzt man $\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{z}(\mathfrak{P})} \sim \bar{\mathfrak{P}}$, ebenso $\bar{\mathfrak{Q}}, \bar{\mathfrak{R}}$, so ist nach dem Korollar 1 zu Hilfssatz 14

$$\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{Z}_1} \sim \bar{\mathfrak{P}} \times \bar{\mathfrak{Q}} \times \bar{\mathfrak{R}} \times \cdots.$$

Es wird also beim Übergang zur Faktorgruppe nach dem Zentrum die Ordnung eines jeden direkten Faktors vermindert. Das Verfahren kann also nur zum Stillstand kommen, wenn $\mathfrak{y}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}$. Also ist $\mathfrak{G}$ hyperkommutativ.

Tiefer liegt die Umkehrung dieses Satzes, die Herr *Burnside* [12]) bewiesen hat, die hier nicht von neuem bewiesen werden soll, und die in unserer Ausdrucksweise lautet:

Umkehrung zu Hilfssatz 16 (Burnsidescher Satz): *Wenn eine Gruppe hyperkommutativ ist, so ist sie das direkte Produkt von Gruppen von Primzahlpotenzordnung.*

Wenn $\mathfrak{G}$ von der Ordnung $p^\alpha q^\beta r^\gamma \ldots$ ist, wo $p, q, r, \ldots$ verschiedene Primzahlen sind, so ist

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{P} \times \mathfrak{Q} \times \mathfrak{R} \times \cdots,$$

wo

$$\operatorname{Ord} \mathfrak{P} = p^\alpha, \quad \operatorname{Ord} \mathfrak{Q} = q^\beta, \quad \operatorname{Ord} \mathfrak{R} = r^\gamma, \ldots$$

Korollar 1 zu Hilfssatz 16: *Untergruppen und Faktorgruppen in hyperkommutativen Gruppen sind wieder hyperkommutativ.*

Beweis: Wenn auf Grund des Burnsideschen Satzes wieder

[12]) Siehe l. c. Anm. 4.

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{P} \times \mathfrak{Q} \times \mathfrak{R} \times \cdots$$

gesetzt wird, und wenn $\mathfrak{G}' < \mathfrak{G}$ ist, so ist nach Korollar 5 zu Satz 1

$$\mathfrak{G}' = \mathfrak{P}' \times \mathfrak{Q}' \times \mathfrak{R}' \times \cdots,$$

wo

$$\mathfrak{P}' < \mathfrak{P}, \quad \mathfrak{Q}' < \mathfrak{Q}, \quad \mathfrak{R}' < \mathfrak{R}, \ldots;$$

also ist nach Hilfssatz 16 $\mathfrak{G}'$ hyperkommutativ. Wenn $\mathfrak{G}' <_i \mathfrak{G}$, so ist

$$\mathfrak{P}' <_i \mathfrak{P}, \quad \mathfrak{Q}' <_i \mathfrak{Q}, \quad \mathfrak{R}' <_i \mathfrak{R}, \ldots.$$

Man setze

$$\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{P}'} \sim \overline{\mathfrak{P}}, \quad \frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{Q}'} \sim \overline{\mathfrak{Q}}, \quad \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}'} \sim \overline{\mathfrak{R}}, \ldots$$

Dann ist nach dem Korollar 1 zu Hilfssatz 14

$$\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{G}'} \sim \overline{\mathfrak{P}} \times \overline{\mathfrak{Q}} \times \overline{\mathfrak{R}} \times \cdots,$$

also nach Hilfssatz 16 auch $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{G}'}$ hyperkommutativ.

Korollar 2 zu Hilfssatz 16: *Es sei*

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{P} \times \mathfrak{Q} \times \mathfrak{R} \times \cdots,$$

wo

$$\operatorname{Ord} \mathfrak{P} = p^{\alpha}, \quad \operatorname{Ord} \mathfrak{Q} = q^{\beta}, \quad \operatorname{Ord} \mathfrak{R} = r^{\gamma},$$

$p, q, r, \ldots$ voneinander verschiedene Primzahlen seien. Dann ist ein Fuß von $\mathfrak{G}$ Fuß eines direkten Faktors.

Beweis: Wenn $\mathfrak{G}' <_i \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ nicht in einem einzigen direkten Faktor enthalten ist, so ist $\mathfrak{G}'$ nach Korollar 1 zu Hilfssatz 16 sogar direkt zerlegbar, besitzt also echte Untergruppen, die invariant in $\mathfrak{G}$ sind; $\mathfrak{G}'$ ist also kein Fuß. Jeder Fuß von $\mathfrak{G}$ ist also in einem einzigen direkten Faktor von $\mathfrak{G}$, wie z. B. in $\mathfrak{P}$, enthalten. Jede invariante Untergruppe $\mathfrak{C} <_i \mathfrak{G}$, für die $\mathfrak{C} < \mathfrak{P}$ ist auch $\mathfrak{C} <_i \mathfrak{P}$; umgekehrt ist, wenn $\mathfrak{C} <_i \mathfrak{P}$, auch $\mathfrak{C} <_i \mathfrak{G}$ nach Korollar 3 zu Satz 2; jeder Fuß von $\mathfrak{G}$, der $< \mathfrak{P}$, ist also Fuß von $\mathfrak{P}$; jeder Fuß von $\mathfrak{P}$ ist Fuß von $\mathfrak{G}$.

Korollar 3 zu Hilfssatz 16: *Es sei wieder*

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{P} \times \mathfrak{Q} \times \mathfrak{R} \times \cdots$$

wie im Korollar 2; die Sockel von

$$\mathfrak{G}, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}, \ldots$$

seien

$$\mathfrak{S}, \mathfrak{S}_{\mathfrak{P}}, \mathfrak{S}_{\mathfrak{Q}}, \mathfrak{S}_{\mathfrak{R}}, \ldots;$$

dann ist

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_{\mathfrak{P}} \times \mathfrak{S}_{\mathfrak{Q}} \times \mathfrak{S}_{\mathfrak{R}} \times \cdots$$

Beweis: Es folgt dies unmittelbar aus der Definition des Sockels als Produkt sämtlicher Füße.

Korollar 4 zu Hilfssatz 16: *In der Ordnung einer hyperkommutativen Gruppe gehen keine anderen Primzahlen auf als in der Ordnung ihres Sockels.*

Beweis: Es ist nach Korollar 3 $\mathfrak{S}_{\mathfrak{P}} < \mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}_{\mathfrak{P}} \neq \mathfrak{E}$, Ord $\mathfrak{S}_{\mathfrak{P}}$ teilbar durch p; also ist Ord $\mathfrak{S}$ teilbar durch p, ebenso durch $q, r, \ldots$

Hieraus folgt speziell:

Korollar 5 zu Hilfssatz 16: *Ist $\mathfrak{G}$ hyperkommutativ und der Sockel $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{G}$ von*

der Ordnung p^σ, worin p eine Primzahl, so ist

$$\text{Ord } \mathfrak{G} = p^\alpha \geqq p^\sigma.$$

Satz 14: *Das Hyperzentrum einer jeden endlichen Gruppe ist hyperkommutativ.*

Beweis: Der Satz ist richtig, wenn das Zentrum gleichzeitig Hyperzentrum ist, d. h. wenn

$$\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{z}(\mathfrak{G}) \text{ und } \mathfrak{z}\left(\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{Z}_1}\right) = \frac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{Z}_1}.$$

Denn $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Z}_1$ ist sogar kommutativ. Mithin ist $\mathfrak{z}(\mathfrak{Y}) = \mathfrak{Y}$, also ist $\mathfrak{Y}$ hyperkommutativ.

Der Beweis werde durch Induktion geführt. Der Satz sei bereits bewiesen in allen Fällen, in denen die Zahl s der Glieder der Zentrenreihe kleiner ist als im vorliegenden Falle. Es sei

$$\mathfrak{Z}_s = \mathfrak{Y} = \mathfrak{y}(\mathfrak{G})$$

das Hyperzentrum von $\mathfrak{G}$, es ist

$$\mathfrak{y}\left(\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{Z}_1}\right) = \frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{Z}_1}.$$

Da die Zentrenreihe von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{Z}_1}$ nur $s-1$ Glieder hat, so gilt für sie bereits der zu beweisende Satz; also ist die Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{Z}_1}$ hyperkommutativ. Es sei $\mathfrak{Z}_1' = \mathfrak{z}(\mathfrak{Y})$; es ist $\mathfrak{Z}_1 < \mathfrak{Z}_1'$, da die Elemente von $\mathfrak{Z}_1$ mit allen Elementen von $\mathfrak{G}$ vertauschbar sind und in $\mathfrak{z}(\mathfrak{Y})$ nur verlangt wird, daß sie mit allen Elementen von $\mathfrak{Y}$ vertauschbar sein sollen. Es ist $\mathfrak{Z}_1' <^i \mathfrak{Y}$, folglich $\frac{\mathfrak{Z}_1'}{\mathfrak{Z}_1} <^i \frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{Z}_1}$. Es ist also, da $\frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{Z}_1}$ hyperkommutativ ist, nach Korollar 1 zu Hilfssatz 16 auch die Faktorgruppe

$$\frac{\left(\frac{\mathfrak{Y}_1}{\mathfrak{Z}_1}\right)}{\left(\frac{\mathfrak{Z}_1'}{\mathfrak{Z}_1}\right)}$$

hyperkommutativ. Die Eigenschaft, hyperkommutativ zu sein, überträgt sich aber auf isomorphe Gruppen. Es ist also $\frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{Z}_1}$ hyperkommutativ, folglich, da $\mathfrak{Z}_1' = \mathfrak{z}(\mathfrak{Y})$ war, ist auch $\mathfrak{Y}$ hyperkommutativ. Da der Satz für $s = 1$ richtig war, so gilt er allgemein.

Hilfssatz 16 a: *Besitzt eine Gruppe $\mathfrak{G}$ eine Reihe invarianter Untergruppen*

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_0, \mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots, \mathfrak{H}_n, \mathfrak{H}_{n+1} = \mathfrak{E},$$

derart, daß $\mathfrak{H}_\nu < \mathfrak{H}_{\nu-1}$ und daß

$$\frac{\mathfrak{H}_{\nu-1}}{\mathfrak{H}_\nu} < \mathfrak{z}\left(\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{H}_\nu}\right) \tag{1}$$

für $\nu = 1, 2, \ldots, n+1$, so ist $\mathfrak{G}$ das direkte Produkt von Gruppen von teilerfremden Primzahlpotenzordnungen.

Beweis: Schreibt man in (1) anstatt des $<$-Zeichens überall das $=$-Zeichen, so erhält man den Burnsideschen Satz. Der von mir Journ. f. Math. Bd. **142** (1913), S. 54—56, gegebene Beweis des Burnsideschen Satzes gilt wörtlich auch für diese Verallgemeinerung, da dort in Wirklichkeit nur die hier gemachte geringere Voraussetzung (1) benutzt wird.

Zweiter Beweis des Satzes 14: Es sei

$$\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{z}(\mathfrak{G}) < \mathfrak{Z}_2 < \cdots < \mathfrak{Z}_s = \mathfrak{Y}$$

die Zentrenreihe von $\mathfrak{G}$. Da

$$\frac{\mathfrak{Z}_\nu}{\mathfrak{Z}_{\nu-1}} = \mathfrak{z}\left(\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{Z}_{\nu-1}}\right),$$

so ist

$$\frac{\mathfrak{Z}_\nu}{\mathfrak{Z}_{\nu-1}} < \mathfrak{z}\left(\frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{Z}_{\nu-1}}\right).$$

Die Voraussetzungen des Hilfssatzes 16 a sind also für $\mathfrak{Y}$ erfüllt; also ist $\mathfrak{Y}$ das direkte Produkt von Gruppen von teilerfremden Primzahlpotenzordnungen, mithin hyperkommutativ nach Hilfssatz 16.

Korollar 1 zu Satz 14: *Es sei* $\mathfrak{Y} = \mathfrak{y}(\mathfrak{G})$,

$$\mathfrak{Y} = \mathfrak{P} \times \mathfrak{Q} \times \mathfrak{R} \times \ldots,$$

wo die Ordnungen der $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}, \ldots$ *untereinander teilerfremde Primzahlpotenzen seien.*

Behauptung: $\mathfrak{P} <_i \mathfrak{G}$, $\mathfrak{Q} <_i \mathfrak{G}$, $\mathfrak{R} <_i \mathfrak{G}, \ldots$

Beweis: Wenn $\mathfrak{Y}$ von der Ordnung $p^\alpha q^\beta r^\gamma \ldots$ und $\mathfrak{Y}' < \mathfrak{Y}$, so ist

$$\mathfrak{Y}' = \mathfrak{P}' \times \mathfrak{Q}' \times \mathfrak{R}' \times \ldots$$

mithin

$$\text{Ord } \mathfrak{Y}' = p^{\alpha'} q^{\beta'} r^{\gamma'} \ldots$$

Soll Ord $\mathfrak{Y}' = p^\alpha$ sein, so muß $\alpha' = \alpha$, $\beta' = 0$, $\gamma' = 0, \ldots$ sein, also

$$\mathfrak{Y}' = \mathfrak{P} \times \mathfrak{E} \times \mathfrak{E} \times \cdots = \mathfrak{P}.$$

$\mathfrak{Y}$ besitzt also nur eine einzige Untergruppe $\mathfrak{P}$ von der Ordnung p^α. Wenn $G < \mathfrak{G}$, so ist, da $\mathfrak{Y} <_i \mathfrak{G}$,

$$G\mathfrak{P}G^{-1} < G\mathfrak{Y}G^{-1} = \mathfrak{Y};$$

also

$$G\mathfrak{P}G^{-1} = \mathfrak{P}, \quad \mathfrak{P} <_i \mathfrak{G}, \quad \text{ebenso} \quad \mathfrak{Q} <_i \mathfrak{G}, \quad \mathfrak{R} <_i \mathfrak{G}, \ldots$$

Korollar 2 zu Satz 14: *Ist* $\mathfrak{G}$ *eine Kohärenzgruppe I. Art, deren Füße sämtlich von der Ordnung* p *sind, so ist die Ordnung des Hyperzentrums* $\mathfrak{Y}$ *von* $\mathfrak{G}$ *eine Potenz von* p.

Beweis: Angenommen, die Behauptung wäre nicht richtig, so wäre

$$\mathfrak{Y} = \mathfrak{P} \times \mathfrak{Q} \times \mathfrak{R} \times \cdots.$$

Nach Korollar 1 zu Satz 14 ist $\mathfrak{Q} <_i \mathfrak{G}$, mithin enthielte $\mathfrak{Q}$ einen Fuß von $\mathfrak{G}$, dessen Ordnung q^φ teilerfremd ist zu p, der also nicht mit Füßen von der Ordnung p kohärent sein könnte. Es muß also $\mathfrak{Y} = \mathfrak{P}$ sein; die Ordnung von $\mathfrak{Y}$ ist mithin eine Potenz von p.

Das gilt speziell auch für einfüßige Faktoren I. Art und für die am Schlusse des vorigen Paragraphen in Satz 13 behandelte Gruppe $\mathfrak{M}$.

Hilfssatz 17: *Es mögen sämtliche Buchstaben die gleiche Bedeutung haben wie in Hilfssatz* 14 *und zwischen ihnen mögen die gleichen Beziehungen bestehen wie dort.* $\overline{\mathfrak{K}}$ *sei eine Supplenaruntergruppe von* $\overline{\mathfrak{G}}$. *Der Isomorphismus*

$$\text{(1)} \qquad \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{P}} \sim \overline{\mathfrak{G}}$$

bewirke die Zuordnung

$$\frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{P}} \sim \overline{\mathfrak{K}}.$$

Behauptung: $\mathfrak{K}$ *ist Supplenaruntergruppe von* $\mathfrak{G}$.

Beweis: Es sei nach der Definition der Supplenaruntergruppe

$$\overline{\mathfrak{K}} = (\overline{\mathfrak{G}}, \overline{\mathfrak{N}}_1 \times \overline{\mathfrak{N}}_2 \times \cdots \times \overline{\mathfrak{N}}_n) = (\overline{\mathfrak{G}}, \overline{\mathfrak{N}}^\times),$$

worin $\overline{\mathfrak{N}}^\times$ zur Abkürzung für das direkte Produkt eingeführt sei. Die analoge Bezeichnung führen wir auch für andere direkte Produkte ein. Der Isomorphismus $\overset{\sim}{\nu}$ bewirke für $\overline{\mathfrak{N}}_\nu < \overline{\mathfrak{B}}$ die Zuordnung

$$\frac{\mathfrak{N}_\nu}{\mathfrak{L}_\nu} \overset{\sim}{\nu} \overline{\mathfrak{N}}_\nu.$$

Wir bilden die Supplenaruntergruppe von $\mathfrak{G}$

$$\mathfrak{K}' = (\mathfrak{G}, \mathfrak{N}_1 \times \mathfrak{N}_2 \times \cdots \times \mathfrak{N}_n) = (\mathfrak{G}, \mathfrak{N}^\times).$$

Es soll gezeigt werden, daß $\mathfrak{K}' = \mathfrak{K}$. Es ist $\mathfrak{L}^\times < \mathfrak{N}^\times$, also

$$\mathfrak{P} = (\mathfrak{G}, \mathfrak{L}^\times) < (\mathfrak{G}, \mathfrak{N}^\times) = \mathfrak{K}'.$$

Also ist die Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{K}'}{\mathfrak{P}} < \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{P}}$. Der Isomorphismus (1) bewirkt also die Zuordnung

$$\frac{\mathfrak{K}'}{\mathfrak{P}} \sim \overline{\mathfrak{K}}' < \overline{\mathfrak{G}}.$$

Die ν-te Komponente von $\mathfrak{K}'$ ist enthalten in $\mathfrak{N}_\nu$; die ν-te Komponente von $\overline{\mathfrak{K}}'$ ist nach der Bildungsvorschrift des Hilfssatzes 14 enthalten in $\overline{\mathfrak{N}}_\nu \overset{\sim}{\nu} \frac{\mathfrak{N}_\nu}{\mathfrak{L}_\nu}$. Also ist $\overline{\mathfrak{K}}' < \overline{\mathfrak{N}}^\times$. Da $\overline{\mathfrak{K}}' < \overline{\mathfrak{G}}$, so ist

$$\overline{\mathfrak{K}}' < (\overline{\mathfrak{G}}, \overline{\mathfrak{N}}^\times) = \overline{\mathfrak{K}}.$$

Also gilt für die isomorph zugeordneten Gruppen

$$\frac{\mathfrak{K}'}{\mathfrak{P}} < \frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{P}} \quad \text{oder} \quad (2) \quad \mathfrak{K}' < \mathfrak{K}.$$

Geht man andrerseits von $\overline{\mathfrak{K}} \sim \frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{P}}$ zur ν-ten Komponente von $\mathfrak{K}$ über, so ist diese wegen $\overline{\mathfrak{N}}_\nu \overset{\sim}{\nu} \frac{\mathfrak{N}_\nu}{\mathfrak{L}_\nu}$ in $\mathfrak{N}_\nu$ enthalten, mithin $\mathfrak{K} < \mathfrak{N}^\times$; da außerdem $\mathfrak{K} < \mathfrak{G}$, so ist

$$\mathfrak{K} < (\mathfrak{G}, \mathfrak{N}^\times) = \mathfrak{K}',$$

also in Verbindung mit (2) $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}'$, mithin $\mathfrak{K}$ Supplenaruntergruppe von $\mathfrak{G}$, was zu beweisen war.

Satz 15: *Es sei*

$$\mathfrak{G} < \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2 \times \cdots \times \mathfrak{B}_n$$

ein subdirektes Produkt, die $\mathfrak{B}_\nu$ seien die Komponenten von $\mathfrak{G}$.

Behauptung:

(1) $$\mathfrak{y}(\mathfrak{G}) = (\mathfrak{G}, \mathfrak{y}(\mathfrak{B}_1) \times \mathfrak{y}(\mathfrak{B}_2) \times \cdots \times \mathfrak{y}(\mathfrak{B}_n)),$$

d. h. das Hyperzentrum ist supplenar.

Beweis: Wir bezeichnen das σ-te Zentrum von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{z}_\sigma(\mathfrak{G})$. Es ist also

$$(2) \quad \mathfrak{z}_1(\mathfrak{G}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{G}); \qquad (3) \quad \frac{\mathfrak{z}_\sigma(\mathfrak{G})}{\mathfrak{z}_{\sigma-1}(\mathfrak{G})} = \mathfrak{z}\left(\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{z}_{\sigma-1}(\mathfrak{G})}\right).$$

Wir wollen zunächst die Formel beweisen

(4) $$\mathfrak{z}_\sigma(\mathfrak{G}) = (\mathfrak{G}, \mathfrak{z}_\sigma(\mathfrak{B}_1) \times \mathfrak{z}_\sigma(\mathfrak{B}_2) \times \cdots \times \mathfrak{z}_\sigma(\mathfrak{B}_n)).$$

Für $\sigma = 1$ ist (4) bereits in Hilfssatz 5 bewiesen. Der Beweis wird durch Induktion geführt. (4) gelte bereits für $\mathfrak{z}_{\sigma-1}$ und soll für $\mathfrak{z}_\sigma$ bewiesen werden. Wir setzen

$$\frac{\mathfrak{B}_\nu}{\mathfrak{z}_\sigma(\mathfrak{B}_\nu)} \underset{\nu,\sigma}{\sim} \overline{\mathfrak{B}}_\nu^{(\sigma)}. \tag{5}$$

Dann liefert Hilfssatz 14 angewandt auf die bereits bewiesene Formel (4) mit $\mathfrak{z}_{\sigma-1}$

$$\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{z}_{\sigma-1}(\mathfrak{G})} \sim \overline{\mathfrak{G}}^{(\sigma-1)} < \overline{\mathfrak{B}}_1^{(\sigma-1)} \times \overline{\mathfrak{B}}_2^{(\sigma-1)} \times \cdots \times \overline{\mathfrak{B}}_n^{(\sigma-1)}, \tag{6}$$

worin die $\overline{\mathfrak{B}}_\nu^{(\sigma-1)}$ die Komponenten von $\overline{\mathfrak{G}}^{(\sigma-1)}$ sind. Auf diese Formel wende man Hilfssatz 5 an und erhält unter Berücksichtigung von (3)

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\mathfrak{z}_\sigma(\mathfrak{G})}{\mathfrak{z}_{\sigma-1}(\mathfrak{G})} = \mathfrak{z}\left(\dfrac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{z}_{\sigma-1}(\mathfrak{G})}\right) \sim \mathfrak{z}(\overline{\mathfrak{G}}^{(\sigma-1)}) \\ = (\overline{\mathfrak{G}}^{(\sigma-1)}, \mathfrak{z}(\overline{\mathfrak{B}}_1^{\sigma-1}) \times \mathfrak{z}(\overline{\mathfrak{B}}_2^{\sigma-1}) \times \cdots \times \mathfrak{z}(\overline{\mathfrak{B}}_n^{(\sigma-1)})). \end{array} \right. \tag{7}$$

Auf Formel (7) läßt sich Hilfssatz 17 anwenden. An die Stelle des dortigen $\mathfrak{P}$ tritt hier das bereits als supplenar bekannte $\mathfrak{z}_{\sigma-1}(\mathfrak{G})$. An die Stelle von $\mathfrak{K}$ tritt $\mathfrak{z}_\sigma(\mathfrak{G})$. Es ist also $\mathfrak{z}_\sigma(\mathfrak{G})$ wieder supplenar; an die Stelle der $\overline{\mathfrak{N}}_\nu$ treten mit Rücksicht auf (5)

$$\mathfrak{z}(\overline{\mathfrak{B}}_\nu^{(\sigma-1)}) \underset{\nu,\sigma-1}{\sim} \mathfrak{z}\left(\frac{\mathfrak{B}_\nu}{\mathfrak{z}_{\sigma-1}(\mathfrak{B}_\nu)}\right) = \frac{\mathfrak{z}_\sigma(\mathfrak{B}_\nu)}{\mathfrak{z}_{\sigma-1}(\mathfrak{B}_\nu)}.$$

Also liefert Hilfssatz 17 die Formel (4) für σ; da sie für $\sigma = 1$ gilt, so gilt sie allgemein.

Es sei s_ν die Gliederanzahl der Zentrenreihe von $\mathfrak{B}_\nu$, so daß

$$\mathfrak{z}_{s_\nu}(\mathfrak{B}_\nu) = \mathfrak{z}_{s_\nu+1}(\mathfrak{B}_\nu) = \cdots = \mathfrak{y}(\mathfrak{B}_\nu).$$

s_μ sei das Maximum aller s_ν. Dann ist wegen (4)

$$\mathfrak{z}_{s_\mu}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{z}_{s_\mu+1}(\mathfrak{G}) = \cdots = \mathfrak{y}(\mathfrak{G}),$$

und es gilt die zu beweisende Formel (1). (Ob, wenn s die Gliederanzahl der Zentrenreihe von $\mathfrak{G}$ bedeutet, $s < s_\mu$ ist, d. h. ob $\mathfrak{y}(\mathfrak{G})$ bereits für ein früheres $\mathfrak{z}_\sigma(\mathfrak{G})$ erreicht wird, brauchen wir nicht zu untersuchen.)

Korollar zu Satz 15: *Ist*

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2 \times \cdots \times \mathfrak{B}_n,$$

so ist

$$\mathfrak{y}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{y}(\mathfrak{B}_1) \times \mathfrak{y}(\mathfrak{B}_2) \times \cdots \times \mathfrak{y}(\mathfrak{B}_n),$$

d. h. das Hyperzentrum eines direkten Produktes ist plenar.

Satz 16: *Es sei eine Gruppe $\mathfrak{G}$ dargestellt als subdirektes Produkt von untereinander inkohärenten Kohärenzgruppen. Dann liefern nur die Faktoren I. Art Komponenten des Hyperzentrums $\mathfrak{Y} = \mathfrak{y}(\mathfrak{G})$, und zwar liefern sie die direkte Zerlegung von $\mathfrak{Y}$ in Faktoren mit teilerfremden Primzahlpotenzordnungen:*

$$\mathfrak{Y} = \mathfrak{P} \times \mathfrak{Q} \times \mathfrak{R} \times \cdots,$$

und die Gruppen $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}, \cdots$ sind in den Blockkomponenten der entsprechenden Kohärenzfaktoren enthalten.

Beweis: Ist $\mathfrak{B}_\nu$ von II. oder III. Art, so ist $\mathfrak{z}(\mathfrak{B}_\nu) = \mathfrak{E}$, also $\mathfrak{y}(\mathfrak{B}_\nu) = \mathfrak{E}$. Es seien $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_m$ die Kohärenzfaktoren I. Art von $\mathfrak{G}$. Dann ist nach Satz 15

$$\mathfrak{y}(\mathfrak{G}) < \mathfrak{y}(\mathfrak{B}_1) \times \mathfrak{y}(\mathfrak{B}_2) \times \cdots \times \mathfrak{y}(\mathfrak{B}_m).$$

Nach Korollar 2 zu Satz 14 sind die $\mathfrak{y}(\mathfrak{B}_n)$ von Primzahlpotenzordnung, und zwar sind es Potenzen verschiedener Primzahlen, weil, wenn zwei Potenzen derselben Primzahl auftreten würden, die Faktoren I. Art bereits kohärent wären. Es ist also nach Korollar 4 zu Satz 1:

$$\mathfrak{Y} = \mathfrak{y}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{y}'(\mathfrak{B}_1) \times \mathfrak{y}'(\mathfrak{B}_2) \times \cdots \times \mathfrak{y}'(\mathfrak{B}_m) = \mathfrak{P} \times \mathfrak{Q} \times \mathfrak{R} \times \cdots,$$

worin

$$\mathfrak{y}'(\mathfrak{B}_n) < \mathfrak{y}(\mathfrak{B}_n).$$

Es kommt $\mathfrak{y}'(\mathfrak{B}_n)$ selbständig in $\mathfrak{G}$ vor, gehört also der Blockkomponente von $\mathfrak{B}_n$ an.

Korollar 1 zu Satz 16: *In der Ordnung des Hyperzentrums $\mathfrak{Y}$ einer Gruppe $\mathfrak{G}$ gehen nur Primzahlen auf, die Ordnungen von Füßen I. Art von $\mathfrak{G}$ sind.*

Beweis: Man gehe von einer ökonomischen Zerlegung von $\mathfrak{G}$ in unzerlegbare subdirekte Faktoren aus. Die verschiedenen Primzahlen, die als Ordnungen von Füßen I. Art vorkommen, seien $p, q, r, \cdots$. Dann sind die Ordnungen der Hyperzentren der Faktoren I. Art Potenzen von $p, q, r, \cdots$ nach Korollar 2 zu Satz 14. Die Faktoren II. und III. Art liefern keinen Beitrag. Die Ordnung von $\mathfrak{Y}$ geht nach Satz 15 in einem Potenzprodukt der $p, q, r, \ldots$ auf, ist also selbst ein Potenzprodukt der $p, q, r, \ldots$, was zu beweisen war.

Korollar 2 zu Satz 16: *In der Ordnung des Hyperzentrums einer Gruppe gehen keine anderen Primzahlen auf als in der Ordnung ihres Zentrums.*

§ 6. Eindeutigkeitsfragen.

Die Aussage, daß zwei subdirekte Faktoren einer Gruppe $\mathfrak{G}$, die in derselben oder in verschiedenen Zerlegungen vorkommen, miteinander identisch sind, hat zunächst keinen Sinn, da der subdirekte Faktor in der Gruppe $\mathfrak{G}$ zunächst nicht vorkommt, sondern eine abstrakte Neuschöpfung ist, die der Darstellung von $\mathfrak{G}$ dient. Wohl aber ist die erzeugende invariante Untergruppe eines Faktors in $\mathfrak{G}$ vorhanden. Zwei subdirekte Faktoren

$$\widehat{\mathfrak{B}}_1 \overset{1}{\sim} \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}_1} \text{ und } \widehat{\mathfrak{B}}_2 \overset{2}{\sim} \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}_2}$$

mögen miteinander „subidentisch" heißen, wenn $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_2$ ist. Es ist dann $\widehat{\mathfrak{B}}_1 \sim \widehat{\mathfrak{B}}_2$. Die Komponenten von $\widehat{\mathfrak{B}}_1$ und $\widehat{\mathfrak{B}}_2$ werden einander so zugeordnet, daß, wenn

$$\widehat{B}_1 < \widehat{\mathfrak{B}}_1, \quad \widehat{B}_2 < \widehat{\mathfrak{B}}_2,$$
$$\widehat{B}_1 \overset{1}{\sim} G_1 \mathfrak{D}_1, \quad \widehat{B}_2 \overset{2}{\sim} G_2 \mathfrak{D}_2,$$
$$G_1 \mathfrak{D}_1 = G_2 \mathfrak{D}_2$$

ist,

$$\widehat{B}_1 \sim \widehat{B}_2$$

gesetzt wird. Zwei Elemente von $\mathfrak{G}$ erhalten also dann und nur dann zugeordnete Komponenten von $\widehat{\mathfrak{B}}_1$ und $\widehat{\mathfrak{B}}_2$, wenn sie demselben Komplex nach $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_2$ angehören.

Für direkte Faktoren fällt der Begriff der Subidentität durchaus nicht mit der Identität zusammen. Zwei direkte Faktoren zweier Zerlegungen sind dann und nur dann subidentisch, wenn dieselben Elemente in ihnen die Komponente $\widehat{E}$ erhalten, d. h. wenn die Komplementärfaktoren identisch sind. Es können also zwei verschiedene direkte Faktoren zweier Zerlegungen subidentisch sein, wenn sie nämlich denselben Komplementärfaktor in beiden Zerlegungen besitzen. Sie können ferner identisch sein, ohne subidentisch zu sein, wenn sie in beiden Zerlegungen verschiedene Komplementärfaktoren besitzen [13]).

Ist

$$\widehat{\mathfrak{B}}_\nu \overset{\nu}{\sim} \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}_\nu}$$

ein subdirekter Faktor von $\mathfrak{G}$, ist ferner $\widehat{\mathfrak{C}}_\nu <_i \widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ die Blockkomponente von $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$, so ist $\widehat{\mathfrak{C}}_\nu \asymp \mathfrak{C}_\nu <_i \mathfrak{G}$; der Blockkomponente ist eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}$ in der Dar-

[13]) Verschiedene Komplementärfaktoren desselben direkten Faktors sind zentral isomorph. Siehe Anm. 2.

stellung zugeordnet. Man darf aber aus der Subidentität zweier Faktoren zweier verschiedener Zerlegungen nicht auf die Identität der ihren Blockkomponenten entsprechenden invarianten Untergruppen von $\mathfrak{G}$ schließen, ebenso wenig umgekehrt. Stimmen jedoch zwei subdirekte Darstellungen in *sämtlichen* erzeugenden invarianten Untergruppen überein, so mögen die Darstellungen miteinander „identisch" heißen. Dann sind auch die den Blockkomponenten entsprechenden invarianten Untergruppen von $\mathfrak{G}$ miteinander identisch. Es war nämlich nach Korollar 1 zu Satz 3

$$\widehat{\mathfrak{C}}_\nu \asymp \mathfrak{C}_\nu = (\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_{\nu-1}, \mathfrak{D}_{\nu+1}, \ldots, \mathfrak{D}_n).$$

Satz 17: *Es sei*

$$\widehat{\mathfrak{B}}_\nu \sim \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}_\nu}$$

ein einfüßiger subdirekter Faktor III. Art aus einer ökonomischen subdirekten Zerlegung von $\mathfrak{G}$. *Es sei* $\widehat{\mathfrak{F}} <_i \widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ *der einzige Fuß von* $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$. *Es sei* $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu \asymp \mathfrak{F}_\nu <_i \mathfrak{G}$. *Dann ist* $\mathfrak{D}_\nu$ *die Untergruppe aller derjenigen Elemente von* $\mathfrak{G}$, *die mit allen Elementen von* $\mathfrak{F}_\nu$ *vertauschbar sind.*

Beweis: Die Untergruppe aller derjenigen Elemente von $\mathfrak{G}$, die mit allen Elementen von $\mathfrak{F}_\nu$ vertauschbar sind, möge vorläufig mit $\mathfrak{D}'_\nu$ bezeichnet werden. Es ist jede Komponente eines Elementes von $\mathfrak{D}'_\nu$ mit jeder Komponente eines Elementes von $\mathfrak{F}_\nu$, d. h. mit jedem Element von $\mathfrak{F}_\nu$ vertauschbar. Es sei zunächst $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu < \widehat{\mathfrak{B}}_\nu$, ohne daß über $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu$ weitere Voraussetzungen gemacht werden; $\widehat{\mathfrak{M}}_\nu < \widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ sei die Untergruppe derjenigen Elemente von $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$, die mit sämtlichen Elementen von $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu$ vertauschbar sind. Dann ist

$$\mathfrak{D}'_\nu \asymp \widehat{\mathfrak{D}}'_\nu = (\widehat{\mathfrak{G}}, \widehat{\mathfrak{B}}_1 \times \widehat{\mathfrak{B}}_2 \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{B}}_{\nu-1} \times \widehat{\mathfrak{M}}_\nu \times \widehat{\mathfrak{B}}_{\nu+1} \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{B}}_n).$$

Wenn speziell $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu$ der einzige Fuß von $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ und von III. Art ist, so ist $\widehat{\mathfrak{M}}_\nu = \widehat{\mathfrak{E}}$ (siehe S. 25 Mitte); also wird

$$\mathfrak{D}'_\nu \asymp \widehat{\mathfrak{D}}'_\nu = (\widehat{\mathfrak{G}}, \widehat{\mathfrak{B}}_1 \times \widehat{\mathfrak{B}}_2 \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{B}}_{\nu-1} \times \widehat{\mathfrak{B}}_{\nu+1} \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{B}}_n);$$

$\widehat{\mathfrak{D}}'_\nu$ ist also die Untergruppe aller derjenigen Elemente von $\widehat{\mathfrak{G}}$, deren $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$-Komponente gleich der Einheit ist. Mithin ist $\widehat{\mathfrak{D}}'_\nu \asymp \mathfrak{D}_\nu$, folglich $\mathfrak{D}'_\nu = \mathfrak{D}_\nu$, was zu beweisen war.

Korollar 1 zu Satz 17: *Die einfüßigen Faktoren III. Art sind in allen ökonomischen subdirekten Zerlegungen einer Gruppe in unzerlegbare Faktoren subidentisch dieselben.*

Beweis: Nach MIU Satz 5 treten sämtliche Füße III. Art einer Gruppe in jeder direkten Zerlegung ihres Sockels in Füße auf. Da nach Satz 17 außerdem die erzeugende invariante Untergruppe eines einfüßigen Faktors III. Art identisch eindeutig feststeht, so sind die Faktoren III. Art in allen ökonomischen Zerlegungen in subdirekte unzerlegbare Faktoren subidentisch dieselben.

Korollar 2 zu Satz 17: *Sind alle Füße einer Gruppe von III. Art, so besitzt sie, von der Reihenfolge der Faktoren abgesehen, eine und nur eine ökonomische Zerlegung in subdirekte unzerlegbare Faktoren.*

Beweis: In zwei Zerlegungen sind nach Korollar 1 zu Satz 17 sämtliche Faktoren subidentisch dieselben, also sind die beiden Zerlegungen miteinander identisch.

Wir wollen sagen, zwei Zerlegungen von $\mathfrak{G}$ in subdirekte Faktoren stimmen isomorph überein, wenn es einen Automorphismus von $\mathfrak{G}$ gibt, der die erzeugenden invarianten Untergruppen paarweise ineinander überführt. Es seien $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_n$ die erzeugenden invarianten Untergruppen der ersten Darstellung, $\mathfrak{D}'_1, \mathfrak{D}'_2, \ldots, \mathfrak{D}'_n$ die erzeugenden invarianten Untergruppen der zweiten Darstellung. $\mathfrak{G} \,\tilde{a}\, \mathfrak{G}$ sei ein Automorphismus von $\mathfrak{G}$, der die Isomorphismen $\mathfrak{D}'_\nu \,\tilde{a}\, \mathfrak{D}_\nu$ bewirke. Dann ist auch

$$\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}_\nu} \,\tilde{a}\, \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}'_\nu} \sim \widehat{\mathfrak{B}}_\nu.$$

Die abstrakte Darstellung durch

$$\widehat{\mathfrak{G}} < \widehat{\mathfrak{B}}_1 \times \widehat{\mathfrak{B}}_2 \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{B}}_n$$

ist also für beide Zerlegungen dieselbe. Wenn

$$G \sim_a G', \quad \text{wo} \quad G < \mathfrak{G}, \quad G' < \mathfrak{G},$$

so erhält G' in der zweiten Darstellung dieselben Komponenten wie G in der ersten Darstellung. Von jeder subdirekten Zerlegung von $\mathfrak{G}$ kann man mit Hilfe jedes Automorphismus von $\mathfrak{G}$ zu einer anderen subdirekten Zerlegung übergehen. Die Zerlegungen in *direkte unzerlegbare* Faktoren sind in diesem Sinne alle untereinander isomorph [14]). Dasselbe ist aber für die ökonomischen Zerlegungen in subdirekte unzerlegbare Faktoren nicht allgemein richtig, wie man an einem Beispiele einer kommutativen Gruppe erkennt.

Es sei

$$B_1^{p^2} = E, \quad B_2^{p^2} = \mathfrak{E}, \quad B_1^p = F_1, \quad B_2^p = F_2;$$

die zyklischen Gruppen der Potenzen dieser Elemente seien entsprechend $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$. Man bilde

$$\mathfrak{G} = \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{F}_1} \times \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{F}_2}.$$

Z. B. kann man unter $\mathfrak{G}$ diejenigen Elemente $\mathfrak{G} = B_1^{\lambda_1} \times \mathfrak{B}_2^{\lambda_2}$ verstehen, für die

$$\lambda_1 \equiv \lambda_2 \mod p.$$

Für die Elemente von $\mathfrak{F}_1$ ist

$$\lambda_1 \equiv 0 \mod p;$$

Für die Elemente von $\mathfrak{F}_2$ ist

$$\lambda_2 \equiv 0 \mod p.$$

Es ist

$$\text{Ord } \mathfrak{G} = p^3.$$

Der Sockel von $\mathfrak{G}$ ist

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2.$$

$\mathfrak{G}$ ist kommutativ, also muß $\mathfrak{G}$ sogar als direktes Produkt zyklischer Faktoren darstellbar sein. $\mathfrak{G}$ enthält Elemente der Ordnung p^2, z. B.

$$B_1 \times B_2 = B.$$

Da der Rang von $\mathfrak{S}$ gleich 2 ist, muß auch die Anzahl der zyklischen direkten Faktoren gleich 2 sein. Der zweite direkte Faktor hat also die Ordnung p. Wenn $\mathfrak{B}$ die Gruppe der Potenzen von B ist, so ist

$$B^p = B_1^p \times B_2^p = F_1 \times F_2 = F.$$

Wenn $\mathfrak{F}$ die Gruppe der Potenzen von F ist, so ist

$$(\mathfrak{F}, \mathfrak{F}_1) = \mathfrak{E};$$

also, da $\mathfrak{B}$ keine von $\mathfrak{F}$ verschiedene Untergruppe der Ordnung p enthält, ist

$$(\mathfrak{B}, \mathfrak{F}_1) = \mathfrak{E}, \quad \mathfrak{B}\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{B} \times \mathfrak{F}_1, \quad \text{Ord } (\mathfrak{B} \times \mathfrak{F}_1) = p^2 \cdot p = p^3 = \text{Ord } \mathfrak{G},$$

also

$$\mathfrak{B} \times \mathfrak{F}_1 = \mathfrak{G}.$$

Wir haben somit zwei nicht isomorphe ökonomische Zerlegungen von $\mathfrak{G}$ in unzerlegbare subdirekte Faktoren.

Satz 18: *Es sei $\mathfrak{S}$ der Sockel einer endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{M}$ sei die invariante Untergruppe aller derjenigen Elemente von $\mathfrak{G}$, die mit allen Elementen von $\mathfrak{S}$ vertauschbar sind;*

[14]) Siehe l. c. Anm. 2.

dann ist $\mathfrak{M}$ supplenar in jeder ökonomischen Zerlegung von $\mathfrak{G}$ in subdirckte unzerlegbare Faktoren, also Hilfssatz 14 auf $\mathfrak{M}$ anwendbar; sämtliche ökonomischen Zerlegungen von $\mathfrak{G}$ in unzerlegbare subdirekte Faktoren rufen die gleiche subdirekte Zerlegung von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{M}}$ hervor.

Beweis: Es sei

$$\mathfrak{G} \asymp \widehat{\mathfrak{G}} < \widehat{\mathfrak{B}}_1 \times \widehat{\mathfrak{B}}_2 \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{B}}_n$$

eine ökonomische subdirekte Zerlegung von $\mathfrak{G}$ in unzerlegbare Faktoren. Es sei $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu$ der einzige Fuß von $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$. $\widehat{\mathfrak{M}}_\nu$ sei die invariante Untergruppe derjenigen Elemente von $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$, die mit allen Elementen von $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu$ vertauschbar sind. Es ist für Faktoren

$$\text{I. Art: } \widehat{\mathfrak{F}}_\nu < \widehat{\mathfrak{M}}_\nu = \widehat{\mathfrak{B}}_\nu,$$
$$\text{II. Art: } \widehat{\mathfrak{F}}_\nu < \widehat{\mathfrak{M}}_\nu \neq \widehat{\mathfrak{B}}_\nu,$$
$$\text{III. Art: } \widehat{\mathfrak{M}}_\nu = \widehat{\mathfrak{E}}.$$

Jede Komponente der Darstellung eines Elementes von $\mathfrak{M}$ ist mit jeder Komponente eines Elementes von $\widehat{\mathfrak{S}}$, d. h. mit jedem Element eines der $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu$ vertauschbar. Mithin ist

$$\mathfrak{M} \asymp \widehat{\mathfrak{M}} < \widehat{\mathfrak{M}}_1 \times \widehat{\mathfrak{M}}_2 \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{M}}_n = \widehat{\mathfrak{M}}^\times.$$

worin $\widehat{\mathfrak{M}}^\times$ zur Abkürzung für das direkte Produkt eingeführt ist. Da $\widehat{\mathfrak{M}} < \widehat{\mathfrak{G}}$, so ist $\widehat{\mathfrak{M}} < (\widehat{\mathfrak{G}}, \widehat{\mathfrak{M}}^\times)$. Da andererseits jedes Element von $(\widehat{\mathfrak{G}}, \widehat{\mathfrak{M}}^\times)$ mit jedem Element eines $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu$, d. h. mit jedem Element von $\widehat{\mathfrak{S}}$ vertauschbar ist, so ist $(\widehat{\mathfrak{G}}, \widehat{\mathfrak{M}}^\times) < \widehat{\mathfrak{M}}$, also

$$\widehat{\mathfrak{M}} = (\widehat{\mathfrak{G}}, \widehat{\mathfrak{M}}^\times).$$

$\widehat{\mathfrak{M}}$ ist also eine Supplenaruntergruppe von $\widehat{\mathfrak{G}}$, mithin kann man die Faktorgruppe $\frac{\widehat{\mathfrak{G}}}{\widehat{\mathfrak{M}}}$ nach Hilfssatz 14 bilden. Es sei

$$\frac{\widehat{\mathfrak{B}}_\nu}{\widehat{\mathfrak{M}}_\nu} \sim \overline{\mathfrak{B}}_\nu;$$

dann liefert Hilfssatz 14:

$$\frac{\widehat{\mathfrak{G}}}{\widehat{\mathfrak{M}}} \sim \overline{\mathfrak{G}} < \overline{\mathfrak{B}}_1 \times \overline{\mathfrak{B}}_2 \times \cdots \times \overline{\mathfrak{B}}_n.$$

Wir betrachten diese subdirekte Darstellung von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{M}}$ als eine unbestimmte subdirekte Darstellung von $\mathfrak{G}$. Die erzeugende invariante Untergruppe des subdirekten Faktors $\overline{\mathfrak{B}}_\nu$ ist isomorph der Untergruppe derjenigen Elemente von $\overline{\mathfrak{G}}$, die die $\overline{\mathfrak{B}}_\nu$-Komponente $\overline{E}$ besitzen. Geht man zur isomorph zugeordneten invarianten Untergruppe von $\frac{\widehat{\mathfrak{G}}}{\widehat{\mathfrak{M}}}$ über und faßt man die Faktorgruppe wieder als Gruppe von Elementen, d. h. als invariante Untergruppe von $\widehat{\mathfrak{G}}$ auf, so handelt es sich um die Untergruppe aller derjenigen Elemente von $\widehat{\mathfrak{G}}$, deren $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$-Komponenten in $\widehat{\mathfrak{M}}_\nu$ enthalten sind. Es ist also diese erzeugende invariante Untergruppe gleich

$$\widehat{\mathfrak{D}}'_\nu = (\widehat{\mathfrak{G}}, \widehat{\mathfrak{B}}_1 \times \widehat{\mathfrak{B}}_2 \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{B}}_{\nu-1} \times \widehat{\mathfrak{M}}_\nu \times \widehat{\mathfrak{B}}_{\nu+1} \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{B}}_n).$$

Es ist dies aber nach dem Anfange des Beweises von Satz 17 auch die Untergruppe aller derjenigen Elemente von $\widehat{\mathfrak{G}}$, die mit sämtlichen Elementen von $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu$ vertauschbar sind. Die Elemente von $\widehat{\mathfrak{D}}'_\nu$ rufen also bei der Transformation in $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu$ den identischen Automorphismus hervor, müssen also, wenn $\widehat{\mathfrak{F}}_\mu \asymp \widehat{\mathfrak{F}}_\nu$ ist, auch in $\widehat{\mathfrak{F}}_\mu$ den identischen Auto-

morphismus hervorrufen. Mithin ist $\widehat{\mathfrak{D}}'_\nu < \widehat{\mathfrak{D}}'_\mu$, ebenso $\widehat{\mathfrak{D}}'_\mu < \widehat{\mathfrak{D}}'_\nu$, folglich $\widehat{\mathfrak{D}}'_\nu = \widehat{\mathfrak{D}}'_\mu$. D. h. die Gruppen $\widehat{\mathfrak{D}}'_\nu$ sind für kohärente Faktoren identisch. Sämtliche untereinander kohärente Faktoren $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ liefern also für die Darstellung von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{M}}$ nur einen und denselben Faktor. Da jeder Faktor einer anderen Zerlegung zu einem Faktor der gegebenen Zerlegung kohärent ist, liefert auch jede andere Zerlegung dieselben subdirekten Faktoren für $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{M}}$.

Wenn $\widehat{\mathfrak{F}}_\nu$ von I. Art ist, so ist $\widehat{\mathfrak{M}}_\nu = \widehat{\mathfrak{B}}_\nu$, also

$$\frac{\widehat{\mathfrak{B}}_\nu}{\widehat{\mathfrak{M}}_\nu} = \frac{\widehat{\mathfrak{B}}_\nu}{\widehat{\mathfrak{B}}_\nu} \sim \overline{\mathfrak{B}}_\nu = \overline{\mathfrak{E}}.$$

Die subdirekten Faktoren I. Art $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ liefern also keinen Beitrag für die Darstellung von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{M}}$. Sämtliche untereinander kohärenten Faktoren II. bzw. III. Art liefern für die Darstellung von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{M}}$ nur einen einzigen Faktor. Die Anzahl der verschiedenen subdirekten Faktoren von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{M}}$ in dieser Darstellung ist also höchstens gleich der Anzahl der Kohärenten II. und III. Art. Für Faktoren III. Art ist $\widehat{\mathfrak{M}}_\nu = \widehat{\mathfrak{E}}$, also $\widehat{\mathfrak{B}}_\nu \sim \overline{\mathfrak{B}}_\nu$. Die subdirekten Faktoren III. Art kommen unverändert auch in der Darstellung von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{M}}$ vor.

Man kann diese Darstellung von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{M}}$ auch folgendermaßen erhalten: Man wähle ein vollständiges System untereinander inkohärenter Füße II. und III. Art aus. Jeder Komplex von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{M}}$ ruft einen wohlbestimmten Automorphismus in $\mathfrak{S}$ hervor. Diesen notiere man, indem man die Automorphismen in den Füßen des vollständigen Systems einzeln notiert. Diese Einzelautomorphismen, als Komponenten aufgefaßt, ergeben die behandelte Darstellung von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{M}}$. Man vergleiche zu diesem Beweise auch Satz 10.

Korollar zu Satz 18: *Es ist*

$$\mathfrak{y}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{Y} < \mathfrak{M}.$$

Beweis: Es sei

$$\widehat{\mathfrak{B}}_1 \times \widehat{\mathfrak{B}}_2 \times \cdots \times \widehat{\mathfrak{B}}_\lambda = \widehat{\mathfrak{B}}_{\mathrm{I}}^{\times}$$

das Produkt sämtlicher Faktoren I. Art einer Zerlegung. Es ist, da für Faktoren I. Art $\widehat{\mathfrak{M}}_\nu = \widehat{\mathfrak{B}}_\nu$ war,

$$\widehat{\mathfrak{B}}_{\mathrm{I}}^{\times} < \widehat{\mathfrak{M}}^{\times},$$

also

$$(\widehat{\mathfrak{G}}, \widehat{\mathfrak{B}}_{\mathrm{I}}^{\times}) < (\mathfrak{G}, \widehat{\mathfrak{M}}^{\times}) = \widehat{\mathfrak{M}}.$$

Da nach dem Satz 16 die Faktoren II. und III. Art keinen Beitrag zu $\mathfrak{Y}$ liefern, so ist nach Satz 15

$$\mathfrak{y}(\widehat{\mathfrak{G}}) < (\widehat{\mathfrak{G}}, \widehat{\mathfrak{B}}_{\mathrm{I}}^{\times}) < \widehat{\mathfrak{M}}, \quad \text{also } \mathfrak{Y} < \mathfrak{M},$$

was zu beweisen war.

August 1927.

Eingegangen 3. August 1928.

Die Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Von *Erhard Tornier* in Kiel.

Inhalt.

Seite
Einleitung 45
§ 1. Grundbegriffe 46
§ 2. Die klassischen Axiome 47
§ 3. Die Borelschen Axiome 52
§ 4. Das Axiom der mathematischen Hoffnung 56
§ 5. Die Operationen der Auswahl und Mischung 59
§ 6. Die abhängigen Wahrscheinlichkeiten 61
Schlußbemerkungen 64

Einleitung.

Es soll gezeigt werden, daß man den Begriffen und Sätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (W.-R.) eine einheitliche arithmetische Deutung geben kann.

Ich halte das für wesentlich, um die bisherigen Unklarheiten der W.-R. auszumerzen. Es besteht nämlich so die Möglichkeit, die sich sonst meist unbemerkt einschleichenden Voraussetzungen einzeln ausfindig zu machen, sie exakt zu formulieren und ihre Verträglichkeit zu zeigen.

Als Beweis für die Brauchbarkeit der Methode möchte ich hier nur die axiomatische Klärung solcher Fragen, wie das Petersburger Problem eine ist, nennen und die Aufzeigung der Folgerungen aus der auch in der Theorie der abzählbaren unabhängigen Wahrscheinlichkeiten oft gemachten Annahme, daß die Summe der Wahrscheinlichkeiten kleiner als eins sein könne (§ 4).

Die Grundgedanken, die hier rein wahrscheinlichkeitstheoretisch formuliert werden, finden sich teilweise schon in einer mehr zahlentheoretisch orientierten Arbeit [1]).

Die sozusagen prämathematische Berechtigung — falls jemand an ihr zweifeln sollte — zu dieser axiomatisch-arithmetischen Behandlung der W.-R. leite ich aus der Auffassung über Sinn und Zweck der W.-R. her, die ich anderweitig kurz dargelegt habe [2]).

Es sei mir der Hinweis gestattet, daß ich nicht beanspruche, eine auf immer abschließende Axiomatik der W.-R. in dieser Arbeit vorzulegen. Ich halte es vielmehr sehr wohl für möglich, daß vielleicht noch unbekannte oder von mir übersehene Schlußweisen oder auch zukünftige Bedürfnisse der Anwendungen später die Hinzunahme neuer Axiome nahelegen können [3]). Hingegen bin ich der Ansicht, daß Fortschritte dieser Art sich immer dem hier gegebenen Rahmen — nämlich dem Begriff des Wahrscheinlichkeitsfeldes — einfügen lassen werden.

---

[1]) *E. Tornier*, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Zahlentheorie, Crelles Journ. **161** (1930).

[2]) *E. Tornier*, Eine neue Grundlegung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Zeitschrift f. Phys. 1930. — Dort findet sich eine Zusammenfassung der Ergebnisse dieser Arbeit und inzwischen erzielter Fortschritte.

[3]) Vgl. die Bemerkungen am Schluß von § 6.

Zur Sache sei bemerkt, daß hier eine reine Häufigkeitstheorie der Wahrscheinlichkeit — wenn auch nicht im üblichen Sinne — vertreten wird. Daraus ergibt sich von selbst, daß die sogenannten geometrischen Wahrscheinlichkeiten hier nur als Grenzwerte höchstens abzählbar unendlicher Wahrscheinlichkeiten gelten können. Durch hinreichend feine Unterteilung der stetigen Gebiete der „günstigen" und „möglichen" Fälle lassen sich aber die geometrischen Wahrscheinlichkeiten immer als diskontinuierliche Wahrscheinlichkeiten deuten, aus denen sie ja umgekehrt, dem Sinne des Integrals als Grenzwert zufolge, hervorgehen. So verstanden, werden sie von den folgenden Ausführungen mit erfaßt.

Die in § 1 eingeführte und oft verwendete arithmetische Sprechweise (teilbar, usw.) scheint zunächst eine unsachgemäße Bevorzugung der in einem Versuch möglichen Fälle, je nach ihrer Anordnung, mit sich zu bringen. Wie man aus der Fassung der Axiome erkennt, ist das jedoch vermieden worden. Diese Sprechweise ließe sich gänzlich umgehen, sie ist jedoch einmal so bequem, daß das schon deshalb nicht geschehen soll, und außerdem leitet sie sehr anschaulich zu einem Gebiet über, das meiner Ansicht nach in Zukunft eines der wichtigsten Anwendungsgebiete der W.-R. werden wird, nämlich zur asymptotischen Zahlentheorie [4]).

Spezielle Sätze — auch über den grundlegenden Begriff des Wahrscheinlichkeitsfeldes — werden nur bewiesen, soweit sie zum Aufbau der Axiomatik unentbehrlich sind, oder — wie z. B. die Sätze von § 5 — wesentlich zum intuitiven Verständnis der Natur des Wahrscheinlichkeitsfeldes beitragen. Dies ist kein Mangel, da für die bekannten Sätze der W.-R. die herkömmlichen Beweise sich sämtlich Schritt für Schritt nachbilden lassen. Ziel der vorliegenden Arbeit ist allein die einwandfreie Begründung des Begriffes „Wahrscheinlichkeitsfeld".

§ 1. Grundbegriffe.

Den Zusammenhang mit der intuitiven Wahrscheinlichkeitsvorstellung gibt folgendes Bild [5]):

Gegeben seien unbeschränkt viele, ev. verschiedene „Kartenspiele" mit bezifferten Karten (ev. abzählbar unendlich vielen). Mit diesen werde eine Folge von (ev. unendlichen) Versuchsreihen angestellt, derart, daß in jeder Versuchsreihe der Reihe nach aus dem 1-ten, 2-ten, ... Kartenspiel je eine Karte gezogen und wieder zurückgelegt wird. Die Ergebnisse werden als Elemente einer unendlichen Matrix gewählt, deren Spaltenindizes die Versuchsreihen, deren Zeilenindizes die Nummern der Versuche in den Versuchsreihen zählen.

Ich gehe von der Anschauung aus, daß eine rein logische Begründung der Behauptung, daß ein statistischer Ausgleich in einer, wenn auch abzählbar unendlichen Versuchsfolge eintreten muß, unmöglich ist, schon deshalb, weil er bei von Versuch zu Versuch wechselnder Wahrscheinlichkeit nicht einzutreten braucht. Deshalb definiere ich „Wahrscheinlichkeit" in bezug auf die Gesamtheit aller in Vergangenheit und Zukunft als anstellbar gedachter Versuchsreihen. Eine Idealisierung dieses Gedankens gerade ist mein Begriff „Wahrscheinlichkeitsfeld", wenn man bedenkt, daß rein mathematisch die Ausdehnung der gleich zu nennenden Matrix ins Unendliche auch nach links (Vergangenheit) und analoge Grenzforderungen nichts Neues bringen, und deshalb hier, wo es sich um rein mathematische Formulierungen handelt, fortbleiben können. Den Anschluß an die Statistik gibt wieder Satz 10.

---

[4]) Vgl. die in Amerkung 1 genannte Arbeit.

[5]) Eine zweite Veranschaulichung wird in den Schlußbemerkungen gegeben.

Den im i-ten Versuch einer Versuchsreihe als möglich angenommenen sich ausschließenden Ergebnissen, seien umkehrbar eindeutig Symbole $e_i^{(r)}$ zugeordnet, deren Anzahl höchstens abzählbar unendlich und mindestens zwei sein soll. Gegeben sei eine Folge

$$\mathfrak{F} = f_1, f_2, f_3, \ldots,$$

deren Elemente

$$f_i = e_i^{(0)}, e_i^{(1)}, e_i^{(2)}, \ldots, e_i^{(t_i)}, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots$$

die dem i-ten Versuch zugeordneten Symbole sind. Demnach können die f_i alle oder teilweise mit endlichem $t_i \geqq 1$ abbrechen, oder auch unendliche Symbolfolgen sein.

Es sei für jedes i die i-te Zeile einer Matrix F irgendwie mit Symbolen aus f_i vollständig belegt, d. h. also, es sei auf jede Stelle (i, k) ein Symbol $e_i^{(r)}$ gestellt, wobei nicht notwendig alle Symbole aus f_i auftreten müssen.

Definition 1. *Ein solches Schema heiße eine „Belegung" F.*

Definition 2. *Ist die Stelle (i, k) einer Belegung F mit $e_i^{(r)}$ besetzt, so heißt die k-te Spalte S_k von F „genau durch die Potenz e_i^r teilbar".*

Definition 3. *Ist die Spalte S_k von F genau durch $e_i^{r'}$, $r' \geqq r$, teilbar, so heißt S_k „teilbar" durch e_i^r schlechthin.*

Folgerung: Jede Spalte ist durch e_i^0 bei beliebigem i teilbar.

Die Ausdrucksweise der elementaren Arithmetik wird im folgenden sinnentsprechend angewandt.

Bezeichnungen:

$$A_k\left(\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \ldots & r_\lambda \\ i_1 & i_2 & & i_\lambda \end{pmatrix}\right)$$

bedeutet stets die Anzahl derjenigen Spalten aus F bis S_k inkl., die genau durch $e_{i_1}^{r_1}$, gleichzeitig genau durch $e_{i_2}^{r_2}$, gleichzeitig genau durch $e_{i_3}^{r_3}$ teilbar sind, usw. bis $e_{i_\lambda}^{r_\lambda}$, kurz: die genau durch das Produkt $e_{i_1}^{r_1} e_{i_2}^{r_2} \cdots e_{i_\lambda}^{r_\lambda}$ teilbar sind.

$$R_k\left(\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \ldots & r_\lambda \\ i_1 & i_2 & & i_\lambda \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{k} A_k\left(\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \ldots & r_\lambda \\ i_1 & i_2 & & i_\lambda \end{pmatrix}\right)$$

bedeutet stets die entsprechende relative Häufigkeit.

$$A_k\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \ldots & r_\lambda \\ i_1 & i_2 & & i_\lambda \end{pmatrix}$$

bedeutet stets die Anzahl derjenigen Spalten aus F bis S_k inkl., die durch das Produkt $e_{i_1}^{r_1} e_{i_2}^{r_2} \cdots e_{i_\lambda}^{r_\lambda}$ teilbar sind.

$$R_k\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \ldots & r_\lambda \\ i_1 & i_2 & & i_\lambda \end{pmatrix} = \frac{1}{k} A_k\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \ldots & r_\lambda \\ i_1 & i_2 & & i_\lambda \end{pmatrix}$$

bedeutet stets die entsprechende relative Häufigkeit. t_i ist stets der Index des letzten Symbols aus f_i, ev. auch unendlich.

§ 2. Die klassischen Axiome.[6])

Axiom I. *Für jede Anzahl $\lambda \geqq 1$ von Symbolen*

$$e_{i_1}^{(r_1)}, e_{i_2}^{(r_2)}, \ldots, e_{i_\lambda}^{(r_\lambda)}; \qquad i_\nu < i_{\nu+1}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \quad \lambda - 1$$

[6]) Die Äquivalenz dieser Axiome mit zwei anderen zeigt Satz 1 (S. 185) der in Anmerkung 1 genannten Arbeit.

existiert

$$\lim_{k\to\infty} R_k\left(\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_\lambda \\ i_1 & i_2 & & i_\lambda \end{pmatrix}\right).$$

Axiom II. *Es gilt*

$$\lim_{k\to\infty} R_k\left(\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_\lambda \\ i_1 & i_2 & & i_\lambda \end{pmatrix}\right) = \prod_{\nu=1}^{\lambda} \lim_{k\to\infty} R_k\left(\begin{pmatrix} r_\nu \\ i_\nu \end{pmatrix}\right) = \prod_{\nu=1}^{\lambda} w_{i_\nu}^{(r_\nu)}.$$

Der Inhalt dieser beiden Axiome ist offenbar das Additions- und das Multiplikationsprinzip für je endlich viele Wahrscheinlichkeiten und alle Sätze, deren Beweise auf diesen beiden Prinzipien allein beruhen (z. B. das Bernoullische Theorem), sind somit gesichert. Ihre Beweise übertragen sich fast wörtlich. Kurz angedeutet sei nur der Sinn des Bayesschen Theorems.

Setzt sich F aus Teilfolgen $F_1, F_2, \dots, F_n$ zusammen, so daß $\lim_{k\to\infty} R_k(F_\lambda) = W(F_\lambda)$ existiert, wo $R_k(F_\lambda)$ die relative Häufigkeit des Auftretens von Spalten aus F_λ in F bis zur k-ten Spalte von F ist, und bildet F_λ für sich eine Belegung, die den Axiomen I, II genügt, so gilt, wie eine leichte Rechnung zeigt,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{A_{k_\lambda}^{(\lambda)}((\mathfrak{C}))}{A_k((\mathfrak{C}))} = \frac{w_\lambda^{(\mathfrak{C})} W(F_\lambda)}{\sum_{\nu=1}^{n} w_\nu^{(\mathfrak{C})} W(F_\nu)}.$$

Dabei bedeutet $A_{k_\lambda}^{(\lambda)}((\mathfrak{C}))$ die Anzahl der durch die Kombination $\mathfrak{C} = e_{i_1}^{r_1} e_{i_2}^{r_2} \cdots e_{i_\varkappa}^{r_\varkappa}$ genau teilbaren Spalten von F_λ bis zur k-ten Spalte von F und $\lim R_{k_\lambda}^{(\lambda)}((\mathfrak{C})) = w_\lambda^{(\mathfrak{C})}$.

Die obige Formel aber ist gerade das Bayessche Theorem.

Satz 1. *Aus den Forderungen*

$$\alpha)\ \lim_{k\to\infty} R_k\left(\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_\lambda \\ 1 & 2 & & \lambda \end{pmatrix}\right) \textit{ existiert für alle } \lambda,$$

$$\beta)\ \lim_{k\to\infty} R_k\left(\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_\lambda \\ 1 & 2 & & \lambda \end{pmatrix}\right) = \prod_{\nu=1}^{\lambda} \lim_{k\to\infty} R_k\left(\begin{pmatrix} r_\nu \\ \nu \end{pmatrix}\right) = \prod_{\nu=1}^{\lambda} w_\nu^{(r_\nu)},$$

$$\gamma)\ \sum_{r=0}^{t_i} w_i^{(r)} = 1 \quad \textit{für alle } i$$

folgen die Axiome I, II, *aber nicht umgekehrt.*

Beweis: Es seien σ verschiedene natürliche Zahlen $i_1 < i_2 < \cdots < i_\sigma$ vorgegeben und ebenso viele, nicht notwendig verschiedene, nicht negative Zahlen $r_{i_1}, r_{i_2}, \dots, r_{i_\sigma}$.

Ist $\sigma + \varrho = i_\sigma$ und bezeichnen die μ_τ sämtliche ϱ von den i_ν verschiedenen Zahlen bis i_σ, durchlaufen ferner die Zahlen r_{μ_τ} unabhängig voneinander die Zahlen von 0 bis zu irgendwelchen vorgegebenen Zahlen s_τ, so gilt, da die rechtsgezählten Spalten eine Teilmenge der links gezählten sind,

$$R_k\left(\begin{pmatrix} r_{i_1} & r_{i_2} & \dots & r_{i_\sigma} \\ i_1 & i_2 & & i_\sigma \end{pmatrix}\right) \geqq \sum_{\substack{r_{\mu_\tau}=0 \\ \tau=1,2,\dots,\varrho}}^{s_\tau} R_k\left(\begin{pmatrix} r_{i_1} & r_{i_2} & \dots & r_{i_\sigma}; & r_{\mu_1} & r_{\mu_2} & \dots & r_{\mu_\varrho} \\ i_1 & i_2 & & i_\sigma & \mu_1 & \mu_2 & & \mu_\varrho \end{pmatrix}\right).$$

Daraus folgt

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} R_k\left(\begin{pmatrix} r_{i_1} & \dots & r_{i_\sigma} \\ i_1 & & i_\sigma \end{pmatrix}\right) \geqq \overline{\lim_{k\to\infty}} \Sigma R_k((\cdots)) \geqq \sum_{\substack{r_{\mu_\tau}=0 \\ \tau=1,2,\dots,\varrho}}^{s_\tau} \overline{\lim_{k\to\infty}} R_k\left(\begin{pmatrix} r_{i_1} & \dots & r_{i_\sigma}; & r_{\mu_1} & \dots & r_{\mu_\varrho} \\ i_1 & & i_\sigma & \mu_1 & & \mu_\varrho \end{pmatrix}\right)$$

$$= \Sigma \lim_{k\to\infty} R_k((\cdots)) = w_{i_1}^{(r_{i_1})} w_{i_2}^{(r_{i_2})} \cdots w_{i_\sigma}^{(r_{i_\sigma})} \sum_{\substack{r_{\mu_\tau}=0 \\ \tau=1,2,\dots,\varrho}}^{s_\tau} w_{\mu_1}^{(r_{\mu_1})} w_{\mu_2}^{(r_{\mu_2})} \cdots w_{\mu_\varrho}^{(r_{\mu_\varrho})}.$$

Durch hinreichend hohe Wahl der s_τ läßt sich aber der Voraussetzung γ) wegen die letzte Summe so dicht an eins bringen als man will. Hierdurch ist bei beliebigen i_ν und r_{i_ν} bewiesen:

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} R_k\left(\begin{pmatrix} r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_\sigma} \\ i_1\ i_2 \quad\ i_\sigma \end{pmatrix}\right) \geqq w_{i_1}^{(r_{i_1})} w_{i_2}^{(r_{i_2})} \dots w_{i_\sigma}^{(r_{i_\sigma})}.$$

Satz 1 wäre also — bis auf die Behauptung der Nichtumkehrbarkeit — bewiesen, wenn außerdem gälte

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} R_k\left(\begin{pmatrix} r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_\sigma} \\ i_1\ i_2 \quad\ i_\sigma \end{pmatrix}\right) \leqq w_{i_1}^{(r_{i_1})} w_{i_2}^{(r_{i_2})} \dots w_{i_\sigma}^{(r_{i_\sigma})}.$$

Daß auch das gilt, soll jetzt gezeigt werden.

Angenommen, es wäre für eine feste Kombination (r'_{i_ν}), $\nu = 1, 2, \dots, \sigma$

$$\overline{\lim_{k=\infty}} R_k\left(\begin{pmatrix} r'_{i_1} r'_{i_2} \dots r'_{i_\sigma} \\ i_1\ i_2 \quad\ i_\sigma \end{pmatrix}\right) = w_{i_1}^{(r'_{i_1})} w_{i_2}^{(r'_{i_2})} \dots w_{i_\sigma}^{(r'_{i_\sigma})} + \varepsilon,\ \varepsilon > 0,$$

so folgte für irgendwelche festen $r_{i_\nu} \geqq r'_{i_\nu}$, $\nu = 1, 2, \dots, \sigma$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sum_{\substack{x_{i_\nu}=0 \\ \nu=1,2,\dots,\sigma}}^{r_{i_\nu}} R_k\left(\begin{pmatrix} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_\sigma} \\ i_1\ i_2 \quad\ i_\sigma \end{pmatrix}\right) \geqq \overline{\lim_{k\to\infty}} R_k\left(\begin{pmatrix} r'_{i_1} r'_{i_2} \dots r'_{i_\sigma} \\ i_1\ i_2 \quad\ i_\sigma \end{pmatrix}\right) + \overline{\lim_{k\to\infty}} \sum_{x_{i_\nu}=0}^{r_{i_\nu}}{}' R_k\left(\begin{pmatrix} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_\sigma} \\ i_1\ i_2 \quad\ i_\sigma \end{pmatrix}\right)$$

$$\geqq \varepsilon + \sum_{\substack{x_{i_\nu}=0 \\ \nu=1,2,\dots,\sigma}}^{r_{i_\nu}} w_{i_1}^{(x_{i_1})} w_{i_2}^{(x_{i_2})} \dots w_{i_\sigma}^{(x_{i_\sigma})}$$ (letzteres auf Grund des ersten Beweisteiles),

wo der Akzent an der Summe das Fortlassen der Kombination (r'_{i_ν}) andeutet.

Die rechte Seite wird aber bei hinreichend hohem r_{i_ν} größer als eins wegen γ), während die linke dem Sinne nach höchstens eins ist. Aus diesem Widerspruch folgt die gesuchte Ungleichung und somit Satz 1 bis auf die behauptete Nichtumkehrbarkeit. Diese letztere wird sich später (Satz 3) nebenbei ergeben.

Aus dem eben geführten Beweis erhält man mühelos die Gültigkeit von

Satz 2. *Ist die Anzahl der möglichen Ergebnisse in jedem Versuch endlich, so folgt aus α) und β) immer γ), d. h. in diesem Falle sind die Axiome I, II äquivalent mit den Forderungen α), β).*

Beweis. Für $i = 1$ folgt der Satz sofort, denn es gilt

$$1 = \sum_{r=0}^{t_1} R_k\left(\begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ für alle } k,$$

also auch

$$1 = \lim_{k\to\infty} \sum_{r=0}^{t_1} R_k\left(\begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \sum_{r=0}^{t_1} \lim_{k\to\infty} R_k\left(\begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \sum_{r=0}^{t_1} w_1^{(r)}.$$

Durch Spezialisierung des Beweises von Satz 1 folgt also

$$\lim_{k\to\infty} R_k\left(\begin{pmatrix} r \\ 2 \end{pmatrix}\right) = w_2^{(r)},\ r = 0, 1, \dots, t_2$$

und hieraus wie eben

$$\sum_{r=0}^{t_2} w_2^{(r)} = 1.$$

Dies Schlußverfahren ist offenbar beliebig oft wiederholbar und somit ist Satz 2 bewiesen nach Satz 1.

Satz 3. *Sind die Dichten* $0 \leqq w_i^{(r)} \leqq 1$ *beliebig vorgegeben mit der Einschränkung, daß* $\sum_{r=0}^{t_i} w_i^{(r)} \leqq 1$ *ist („kleiner" kommt natürlich nur für* $t_i = \infty$ *in Frage), so gibt es stets Belegungen, die den Axiomen I, II mit den vorgegebenen Dichten genügen.*

Beweis. Es werde zunächst angenommen, daß für alle i gilt

$$\sum_{r=0}^{t_i} w_i^{(r)} = 1 .$$

Es bedeute $\{\alpha\}$ wie üblich diejenige ganze Zahl, die der Bedingung genügt

$$\alpha \leqq \{\alpha\} < \alpha + 1 .$$

Betrachtet wird nun folgendes Verfahren $\mathfrak{v}(e^{(r)}, w^{(r)})$ zur Besetzung einer Stellenfolge ψ mit den Symbolen $e^{(r)}$, denen in ψ die Dichte $w^{(r)}$ zukommen soll.

$e^{(0)}$ wird auf ψ durch die Vorschrift verteilt, daß für alle k gelten soll

$$\mathfrak{A}_k((0)) = \{k w^{(0)}\} .$$

Hierdurch ist $e^{(0)}$ eindeutig auf ψ verteilt. (Es wird für die Anzahl $\mathfrak{A}$ statt A verwandt, um zwischen der Zählung in einer Belegung F und der auf einer durch $\mathfrak{v}(e, w)$ besetzten Stellenfolge zu unterscheiden. Diese Art der Bezeichnung wird durchgängig festgehalten.)

Darauf wird das Symbol $e^{(1)}$ durch die Vorschrift eingefügt, daß für alle k gelten soll

$$\mathfrak{A}_k((0 \vee 1)) = \{k(w^{(0)} + w^{(1)})\},$$

wo „$\vee$", wie fortan überall, „oder" bedeutet. Hierdurch ist auch $e^{(1)}$ eindeutig auf ψ festgelegt.

Dann wird $e^{(2)}$ durch die Vorschrift eingefügt, daß für alle k gelten soll

$$\mathfrak{A}_k((0 \vee 1 \vee 2)) = \{k(w^{(0)} + w^{(1)} + w^{(2)})\}.$$

Diese Methode werde unbegrenzt fortgesetzt. Sie ist das oben genannte Verfahren $\mathfrak{v}(e^{(r)}, w^{(r)})$.

Es ist zu zeigen, daß so erstens ψ lückenlos besetzt wird, und daß zweitens $e^{(r)}$ die Dichte $w^{(r)}$ in ψ erhält.

Das erstere folgt unmittelbar aus der Voraussetzung $\Sigma w_i^{(r)} = 1$ und aus der Definition von $\{\alpha\}$.

Das zweite folgt aus der Gleichung

$$\mathfrak{A}_k((r)) = \mathfrak{A}_k((0 \vee 1 \vee \cdots \vee r)) - \mathfrak{A}_k((0 \vee 1 \vee \cdots \vee (r-1))) = \{k \sum_{\varrho=0}^{r} w^{(\varrho)}\} - \{k \sum_{\varrho=0}^{r-1} w^{(\varrho)}\},$$

die die Ungleichung liefert

$$k w^{(r)} + 1 > \mathfrak{A}_k((r)) > k w^{(r)} - 1 ,$$

die sofort ergibt

$$\lim_{k \to \infty} \mathfrak{R}_k((r)) = w^{(r)} .$$

Die erste Zeile ψ_1 der zu konstruierenden Belegung F sei nun durch das Verfahren $\mathfrak{v}(e_1^{(r)}, w_1^{(r)})$ besetzt.

Als neue durch $\mathfrak{v}(e_2^{(r)}, w_2^{(r)})$ zu besetzende Stellenfolge $\psi_2^{(0)}$ werden die Plätze der zweiten Zeile von F gewählt, die unter den Symbolen $e_1^{(0)}$ liegen. Als nächste wieder durch $\mathfrak{v}(e_2^{(r)}, w_2^{(r)})$ zu besetzende Stellenfolge $\psi_2^{(1)}$ gelten die Plätze der zweiten Zeile von F, die genau unter Symbolen $e_1^{(1)}$ liegen. Als nächste wieder durch $\mathfrak{v}(e_2^{(r)}, w_2^{(r)})$ zu besetzende Stellenfolge $\psi_2^{(2)}$ gelten die Plätze der zweiten Zeile von F, die unter den Symbolen $e_1^{(2)}$ liegen, usw.

Hierdurch ist ein Verfahren erklärt, das die zweite Zeile von F eindeutig aufbaut. Es werde mit $\mathfrak{V}(e_1; e_2^{(r)}, w_2^{(r)})$ bezeichnet.

Man denke sich nun alle verschiedenen, übereinanderstehenden Symbolpaare dieser beiden Zeilen zu neuen Symbolen (e_1, e_2) zusammengefaßt und wende $\mathfrak{V}((e_1, e_2); e_3^{(r)}, w_3^{(r)})$ an, um die dritte Zeile von F zu erhalten.

Indem man ferner alle verschiedenen Symboltripel (e_1, e_2, e_3) als neue Symbole auffaßt und $\mathfrak{V}((e_1, e_2, e_3); e_4^{(r)}, w_4^{(r)})$ anwendet, erhält man die vierte Zeile von F.

Durch unbegrenzte Fortsetzung dieser Methode ist ein eindeutiges Verfahren gegeben, F ganz zu belegen.

Es ist zu zeigen, daß diese Belegung F die gewünschten Eigenschaften hat, also den Axiomen I, II genügt.

Dazu benötigt man eine Rekursionsformel, die unmittelbar aus der Natur der Konstruktion entspringt.

Setzt man

$$Q = A_k\left(\binom{r_1\, r_2 \dots r_{\varkappa-1}}{1\, 2 \dots \varkappa-1}\right)$$

so gilt

$$A_k\left(\binom{r_1\, r_2 \dots r_{\varkappa-1}\; r_\varkappa}{1\, 2 \dots \varkappa-1\; \varkappa}\right) = \mathfrak{A}_Q\left(\binom{r_\varkappa}{\varkappa}\right) = \mathfrak{A}_Q\left(\binom{0}{\varkappa} \vee \binom{1}{\varkappa} \vee \dots \vee \binom{r_\varkappa}{\varkappa}\right) - \mathfrak{A}_Q\left(\binom{0}{\varkappa} \vee \binom{1}{\varkappa} \vee \dots \vee \binom{r_{\varkappa-1}}{\varkappa}\right)$$

$$= \left\{A_k\left(\binom{r_1\, r_2 \dots r_{\varkappa-1}}{1\, 2 \dots \varkappa-1}\right) \sum_{\varrho=0}^{r_\varkappa} w_\varkappa^{(\varrho)}\right\} - \left\{A_k\left(\binom{r_1\, r_2 \dots r_{\varkappa-1}}{1\, 2 \dots \varkappa-1}\right) \sum_{\varrho=0}^{r_\varkappa-1} w_\varkappa^{(\varrho)}\right\}.$$

Aus dieser Rekursionsformel folgt sofort

$$A_k\left(\binom{r_1\, r_2 \dots r_{\varkappa-1}}{1\, 2 \dots \varkappa-1}\right) w_\varkappa^{(r_\varkappa)} - 1 < A_k\left(\binom{r_1\, r_2 \dots r_\varkappa}{1\, 2 \dots \varkappa}\right) < A_k\left(\binom{r_1\, r_2 \dots r_{\varkappa-1}}{1\, 2 \dots \varkappa-1}\right) w_\varkappa^{(r_\varkappa)} + 1,$$

also

$$\lim_{k\to\infty} R_k\left(\binom{r_1\, r_2 \dots r_\varkappa}{2\, 1 \dots \varkappa}\right) = w_\varkappa^{(r_\varkappa)} \lim_{k\to\infty} R_k\left(\binom{r_1\, r_2 \dots r_{\varkappa-1}}{1\, 2 \dots \varkappa-1}\right).$$

Hiermit ist das Erfülltsein der Forderungen $\alpha)$, $\beta)$ von Satz 1 gezeigt, und da $\gamma)$ nach Voraussetzung gilt, genügt F den Axiomen I, II mit den vorgegebenen Dichten $w_i^{(r)}$.

Um Satz 3 voll zu beweisen, bleibt noch zu zeigen, daß man die bei der Konstruktion gemachte Voraussetzung $\sum_{r=0}^{t_i} w_i^{(r)} = 1$ nachträglich eliminieren kann.

Gälte nämlich diese Bedingung für einige i (für die dann natürlich $t_i = \infty$ ist) nicht, so könnte man nach Einführung von Hilfssymbolen $e_i^{(1a)}$, denen die Dichte $w_i^{(1a)}$ zukommt, die die $\Sigma\, w_i^{(r)}$ zu eins ergänzt, die Konstruktion durchführen. Diese Symbole $e_i^{(1a)}$ lassen sich nun nachträglich z. B. folgendermaßen beseitigen. Man ersetze auf dem r-ten der mit $e_i^{(1a)}$ besetzten Plätze $e_i^{(1a)}$ durch $e_i^{(r)}$, $r = 1, 2, 3, \cdot\cdot$, für alle in Frage kommenden i. Dadurch erhält man eine Belegung, in der die Symbole $e_i^{(1a)}$ verschwunden sind. Die Gesamtheit aller anderen Dichten ist aber nicht geändert worden. Für die neue Belegung nämlich kann die Anzahl

$$A_k\left(\binom{r_1\, r_2 \dots r_\varkappa}{1\, 2 \dots i_\varkappa}\right)$$

sich für alle k höchstens um $\varkappa$ im Vergleich zu derselben Anzahl der alten Belegung vermehrt haben. Daß keine Verminderung möglich ist, folgt, da kein Symbol $e_i^{(r)}$, $r \neq 1$a

von irgendwelchem Platze entfernt wurde. Eine Vermehrung aber kann nur dadurch eingetreten sein, daß in einer Spalte für mindestens ein i_ν in der i_ν-ten Zeile $e_{i_\nu}^{(1a)}$ stand, und daß dieser mit $e_{i_\nu}^{(1a)}$ besetzte Platz genau der r_{i_ν}-te unter den mit $e_{i_\nu}^{(1a)}$ besetzten Plätzen war. Das kann aber offenbar höchstens in $\varkappa$ Spalten eintreten. Also bleiben die Axiome I, II mit unveränderten Dichten gültig, und Satz 3 ist dadurch voll bewiesen, und somit auch die Nichtumkehrbarkeit von Satz 1 erkannt. Im Hinblick auf Erfordernisse des folgenden Paragraphen sei noch bemerkt, daß durch die Ausschaltung der $e_i^{(1a)}$ die relative Häufigkeit der Symbole $e_i^{(0)}$ offenbar gar nicht geändert wird.

§ 3. Die Borelschen Axiome [7]).

Definition 4. *Eine Folge*

$$\Phi = (\varphi_n) = \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots,$$

deren Elemente

$$\varphi_n = S_1^{(n)}, S_2^{(n)}, S_3^{(n)}, \ldots$$

Spaltenfolgen (ev. abbrechende) der Belegung F in der durch F festgelegten Reihenfolge sind, heißt „Selektiv", wenn gilt:

1) *Für jede Gesamtheit $G_p^{(\sigma)}$ aller solcher Spalten aus F, die von der $(p+1)$-ten Zeile ab übereinstimmen, existiert eine Zahl $N(G_p^{(\sigma)})$ so, daß eine jede Spalte aus $G_p^{(\sigma)}$ entweder in jedem φ_n mit $n > N(G_p^{(\sigma)})$ vorkommt, oder in keinem solchen φ_n. (Hierin brauchen sich verschiedene Spalten desselben $G_p^{(\sigma)}$ keineswegs gleich zu verhalten.)*

2) *Bedeutet $R_k(\varphi_n)$ die relative Häufigkeit des Auftretens der Spalten aus φ_n in F bis S_k inkl., so existiert für alle n*

$$\lim_{k\to\infty} R_k(\varphi_n) = W(\varphi_n).$$

3) *Für die Folgen φ_n von Φ existiert*

$$\lim_{n\to\infty} W(\varphi_n).$$

Die Bedingung 1) ist offenbar äquivalent mit folgender Fassung, die trotz ihrer größeren Kompliziertheit oft handlicher ist:

Für die Symbolfolge

$$\Theta = e_1^{(\vartheta_1)}, e_2^{(\vartheta_2)}, e_3^{(\vartheta_3)}, \ldots, \qquad 0 \leqq \vartheta_i \leqq t_i$$

gibt es zu jeder nicht negativen ganzen Zahl p eine zweite solche Zahl $N(\Theta, p)$, so daß in allen φ_n mit $n > N(\Theta, p)$ alle die Spalten aus F nicht mehr neu auftreten oder ausfallen können, die nach beliebigen p ersten Gliedern übereinstimmen mit

$$e_{p+1}^{(\vartheta_{p+1})}, e_{p+2}^{(\vartheta_{p+2})}, e_{p+3}^{(\vartheta_{p+3})}, \ldots.$$

Definition 5.

Die Folge φ_∞ der Spalten aus F, von denen jede fast allen φ_n eines Selektivs Φ angehört, heißt die „Grenzfolge" des Selektivs.

---

[7]) Ich möchte die folgenden Axiome so bezeichnen, da Herr *Borel* sowohl in seiner Arbeit: Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques, Rend. Circ. Mat. Pal. **27**, als auch in: Traité du calcul des probabilités, t. II, fasc. 1 (Paris 1926) implizit eine solche Schlußweise benutzt.

Axiom III.

Für jede Grenzfolge φ_∞ aus F existiert

$$\lim_{k\to\infty} R_k(\varphi_\infty).$$

Axiom IV.

Ist φ_∞ Grenzfolge des Selektivs $\Phi = (\varphi_n)$, so gilt

$$\lim_{k\to\infty} R_k(\varphi_\infty) = \lim_{n\to\infty} W(\varphi_n).$$

Um klar zu machen, auf welche Fragen sich diese Axiome beziehen, sei folgendes einfachstes Beispiel genannt.

Welches ist die Wahrscheinlichkeit, daß in einer unendlichen alternativen Versuchsreihe, in der der „Eintritt des Ereignisses" im i-ten Versuch die Wahrscheinlichkeit w_i hat, das Ereignis nie eintritt?

Diese Frage wird beantwortet, indem man die Wahrscheinlichkeit W_n berechnet, daß das Ereignis in den n ersten Versuchen nie eintritt, und dann $\lim_{n\to\infty} W_n$ bildet. Dies Vorgehen kommt in meiner Axiomatik darauf hinaus, daß man die Folge φ_n der Spalten aus F auswählt, die weder durch e_1 noch durch e_2 noch durch $e_3, \ldots$, noch durch e_n teilbar sind, die Dichte $W(\varphi_n)$ berechnet und zur Grenze $n \to \infty$ übergeht. Man sieht — analog zum Beweis von Satz 4 — leicht ein, daß die so definierten φ_n ein Selektiv bilden, dessen Grenzfolge φ_∞ die Gesamtheit der Spalten aus F ist, die durch kein e_i teilbar sind.

Weitere Fragen dieser Art finden sich in den genannten Arbeiten Herrn Borels und des Verfassers. Die letztere zeigt insbesondere, daß diese Axiome beträchtliches zahlentheoretisches Interesse haben. Der folgende Satz erweitert die Gültigkeit der Axiome I, II auf unendlich viele Symbole.

Satz 4.

Ist $e_{i_1}^{(r_1)}, e_{i_2}^{(r_2)}, e_{i_3}^{(r_3)}, \cdots, i_\nu < i_{\nu+1}$, eine unendliche Symbolfolge, so gilt

$$\lim_{k\to\infty} R_k\left(\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & \cdots \\ i_1 & i_2 & i_3 & \end{pmatrix}\right) = \lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty} R_k\left(\begin{pmatrix} r_{i_1} & r_{i_2} & \cdots & r_{i_\nu} \\ i_1 & i_2 & & i_\nu \end{pmatrix}\right),$$

wobei ν zu n so bestimmt ist, daß als letztes $i_\nu \leqq n$ ist. Der Satz folgt ohne Benutzung von Axiom II.

Beweis. Man denke sich jeden Platz (k, i) der Belegung mit dem Zeichen -1, wenn für das auf ihm stehende Symbol $e_i^{(r)}$ i ein i_λ aber $r \neq r_{i_\lambda}$ ist, oder mit dem Zeichen $+1$, wenn i ein i_λ und $r = r_{i_\lambda}$ resp. wenn i kein i_λ ist, überlagert.

φ_n sei erklärt als Folge der Spalten aus F, die bis zur n-ten Zeile kein -1 haben. $\Phi = (\varphi_n)$ ist dann Selektiv. Die Forderung 1) ist nämlich offensichtlich erfüllt, ebenso die Forderung 3) auf Grund von Axiom I. Ist ferner $\Theta = (e_i^{(\vartheta_i)})$ vorgegeben und wird die (± 1)-Überlagerung auch in Θ vorgenommen, so ist offenbar $N(\Theta, 0) = m$, wenn m der kleinste Stellenindex ist, für den -1 in Θ auftritt, resp. $m = 1$, wenn es eine endliche solche Zahl nicht gibt. Betrachtet man das $e_{p+1}^{(\vartheta_{p+1})}, e_{p+2}^{(\vartheta_{p+2})}, \ldots$ zugeordnete Endstück der (± 1)-Folge, so kann dieses nur auf endlich viele Arten nach links zu vollständigen (± 1)-Folgen ergänzt werden. Wählt man für $N(\Theta, p)$ das größte m dieser (± 1)-Folge, so ist die Forderung 2) offenbar erfüllt und der Satz bewiesen, da die Grenzfolge von Φ die Gesamtheit der genau durch $e_{i_1}^{(r_1)}$ und $e_{i_2}^{(r_2)}$ und $e_{i_3}^{(r_3)}$ ... teilbaren Spalten ist.

Es ist zu zeigen, daß die Axiome I—IV gleichzeitig erfüllbar sind. Dazu sind längere Betrachtungen und neue Begriffsbildungen erforderlich, wenn man anstrebt, diesen Nachweis für möglichst allgemeine Dichten $w_i^{(r)}$ zu führen.

Bezeichnung: Im folgenden ist stets

$$\overline{w}_i^{(r)} = 1 - w_i^{(0)} - w_i^{(1)} - \cdots - w_i^{(r-1)}.$$

Hilfsdefinition 1. *Eine Belegung F heißt „beschränkt", wenn bei geeigneter Numerierung der Symbole*

a) $\lim_{k\to\infty} R_k\left(\binom{0}{i}\right) = w_i^{(0)}$ *für alle i existiert,*

b) eine Zahlenfolge c_i existiert, so daß für alle k und fast alle i gilt

$$R_k\binom{1}{i} \leqq c_i\, \overline{w}_i^{(1)},$$

während $\sum_i c_i\, \overline{w}_i^{(1)}$ *konvergiert.*

Hilfssatz 1. *Für jede beschränkte Belegung sind die Borelschen Axiome erfüllt.*

Beweis. Es ist also zu zeigen, daß III, IV für jedes Selektiv einer beschränkten Belegung gelten. Zur Durchführung des Beweises benötigt man folgenden, auch für die nächste Axiomgruppe wichtigen, bekannten

Hilfssatz 2. *Ist $(a_k^{(n)})$ eine Doppelfolge reeller Zahlen und existiert*

1) $a_\infty^{(n)} = \lim_{k\to\infty} a_k^{(n)}$ *für jedes n,*

2) $a_k^{(\infty)} = \lim_{n\to\infty} a_k^{(n)}$ *für jedes k,*

und ist $\lim_{n\to\infty} a_k^{(n)}$ *gleichmäßig in k, so folgt die Existenz und Gleichheit von*

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty} a_k^{(n)} \text{ und } \lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty} a_k^{(n)}.$$

Wählt man nun irgend ein Selektiv Φ aus F fest aus und identifiziert

$$a_k^{(n)} \text{ mit } R_k(\varphi_n),$$

so hat man, um den Hilfssatz 2 anwenden zu können, zunächst die Existenz der folgenden beiden Grenzwerte zu beweisen:

1) $\lim_{k\to\infty} R_k(\varphi_n) = W(\varphi_n)$ für jedes n,

2) $\lim_{n=\infty} R_k(\varphi_n) = R_k(\varphi_\infty)$ für jedes k

1) ist aber identisch mit Forderung 2) für Selektive, also von selbst erfüllt.

2) folgt sofort aus der Definition 5 der Grenzfolge φ_∞ und der Forderung 1) für Selektive, wenn man bedenkt, daß nur über endlich viele, nämlich k, Spalten zu entscheiden ist, und daß jede Spalte entweder fast allen φ_n angehört, oder fast allen φ_n nicht angehört. (Fast = bis auf endlich viele.) Des Hilfssatzes 2 wegen ist also nur noch die Gleichmäßigkeit von 2) in k zu zeigen, um die behauptete Gültigkeit der Axiome III, IV darzutun.

Demnach bleibt zu beweisen, daß zu jedem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein $n_0(\varepsilon)$ so bestimmt werden kann, daß für alle k gilt

$$|R_k(\varphi_n) - R_k(\varphi_\infty)| < \varepsilon, \quad \text{wenn} \quad n \geqq n_0(\varepsilon).$$

Der Forderung 2) für Selektive wegen gibt es nun aber zu jeder natürlichen Zahl n_1 eine zweite $N(\Theta, n_1)$, $\Theta = (e_i^{(0)})$, so daß in keinem φ_n mit $n > N(\Theta, n_1)$ noch Spalten aus F neu auftreten oder ausfallen können, die nicht wenigstens durch ein e_q mit $q > n_1$ teilbar sind. Für $n_1 \geqq n^*$, wo n^* den größten der Indizes i bezeichnet, für die in F nach

Forderung b) $R_k\binom{1}{i} > c_i \overline{w}_i^{(1)}$ sein darf, gilt also bestimmt:

$$|R_k(\varphi_{n_1}) - R_k(\varphi_\infty)| \leqq R_k\binom{1}{n_1+1} + R_k\binom{1}{n_1+2} + \cdots \leqq \sum_{\lambda=1}^{\infty} c_{n_1+\lambda}\overline{w}_{n_1+\lambda}^{(1)}.$$

Der Forderung b) wegen folgt aber weiterhin

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} c_{n_1+\lambda}\overline{w}_{n_1+\lambda}^{(1)} < \varepsilon, \quad \text{wenn} \quad n_1 \geqq \bar{n}(\varepsilon) \quad \text{ist.}$$

Zusammengefaßt ergibt sich

$$|R_k(\varphi_n) - R_k(\varphi_\infty)| < \varepsilon \quad \text{für} \quad n \geqq n_0(\varepsilon),$$

wenn $n_1 = \operatorname{Max}(n^*, \bar{n}(\varepsilon))$ ist und $n_0(\varepsilon) = N(\Theta, n_1)$.

Hiermit ist Hilfssatz 1 bewiesen.

Um die Vereinbarkeit der Axiome I—IV zu zeigen, beweise ich einen Satz gleich in allgemeinerer Form als hier nötig wäre, da ich ihn für die nächste Axiomgruppe in dieser allgemeinen Form brauche.

Hilfssatz 3. *Für jede durch die Konstruktion im Beweis von Satz* 3, § 2 *hergestellte Belegung F gilt (auch für* $\varkappa = \infty$*):*

$$R_k\binom{r_1\, r_2 \ldots r_\varkappa}{\varrho_1\, \varrho_2 \quad\; \varrho_\varkappa} \leqq \prod_{\nu=1}^{\varkappa} \overline{w}_{\varrho_\nu}^{(r_\nu)}.$$

Beweis. Er wird durch vollständige Induktion geführt, nachdem die Behauptung für $\varkappa = 1$ bewiesen ist. Es gilt offenbar

$$A_k\left(\binom{0}{\varrho} \vee \binom{1}{\varrho} \vee \cdots \vee \binom{r-1}{\varrho}\right) = \sum_{\substack{\lambda_\alpha = 0 \\ \alpha = 1, 2, \ldots, \varrho-1}}^{t_\alpha} A_k\left(\binom{\lambda_1\, \lambda_2 \ldots \lambda_{\varrho-1}}{1 \quad 2 \quad\; \varrho-1}; \binom{0}{\varrho} \vee \binom{1}{\varrho} \vee \cdots \vee \binom{r-1}{\varrho}\right).$$

Setzt man

$$A_k\left(\binom{\lambda_1\, \lambda_2 \ldots \lambda_{\varrho-1}}{1 \quad 2 \quad\; \varrho-1}\right) = Q(\lambda_\alpha),$$

so folgt

$$A_k\left(\binom{0}{\varrho} \vee \binom{1}{\varrho} \vee \cdots \vee \binom{r-1}{\varrho}\right) = \sum_{\substack{\lambda_\alpha = 0 \\ \alpha = 1, 2, \cdots, \varrho-1}}^{t_\alpha} \mathfrak{A}_{Q(\lambda_\alpha)}\left(\binom{0}{\varrho} \vee \binom{1}{\varrho} \vee \cdots \vee \binom{r-1}{\varrho}\right) = \sum_{\substack{\lambda_\alpha = 0 \\ \alpha = 1, \cdots, \varrho-1}}^{t_\alpha} \left\{Q(\lambda_\alpha) \sum_{\mu=0}^{r-1} w_\varrho^{(\mu)}\right\}$$

$$\geqq \sum_{\substack{\lambda_\alpha = 0 \\ \alpha = 1, \cdots, \varrho-1}}^{t_\alpha} Q(\lambda_\alpha) \sum_{\mu=0}^{r-1} w_\varrho^{(\mu)} = k \sum_{\mu=0}^{r-1} w_\varrho^{(\mu)}.$$

Hieraus folgt

$$A_k\binom{r}{\varrho} = k - A_k\left(\binom{0}{\varrho} \vee \binom{1}{\varrho} \vee \cdots \vee \binom{r-1}{\varrho}\right) \leqq k - k \sum_{\mu=0}^{r-1} w_\varrho^{(\mu)} = k\overline{w}_\varrho^{(r)},$$

also der Ausgangspunkt der Induktion.

Ferner ist

$$A_k\binom{r_1\, r_2 \ldots r_\varkappa}{\varrho_1\, \varrho_2 \quad\; \varrho_\varkappa} = A_k\binom{r_1\, r_2 \ldots r_{\varkappa-1}}{\varrho_1\, \varrho_2 \quad\; \varrho_{\varkappa-1}} - \sum_{\substack{j_i = r_i \\ i = 1, 2, \cdots, \varkappa-1}}^{t_i} A_k\left(\binom{j_1\, j_2 \ldots j_{\varkappa-1}}{\varrho_1\, \varrho_2 \quad\; \varrho_{\varkappa-1}}; \binom{0}{\varrho_\varkappa} \vee \binom{1}{\varrho_\varkappa} \vee \cdots \vee \binom{r_{\varkappa-1}}{\varrho_\varkappa}\right)$$

$$= A_k\binom{r_1\, r_2 \ldots r_{\varkappa-1}}{\varrho_1\, \varrho_2 \quad\; \varrho_{\varkappa-1}}$$

$$- \sum_{\substack{\lambda_\alpha = 0 \\ \alpha \neq \varrho_\nu \\ 1 \leqq \alpha \leqq \varrho_\varkappa - 1}}^{t_\alpha} \sum_{j_i = r_i}^{t_i} A_k\binom{\lambda_1\, \lambda_2 \ldots \lambda_{\varrho_1-1}\; j_1\, \lambda_{\varrho_1+1} \ldots \lambda_{\varrho_2-1}\, j_2 \ldots \lambda_{\varrho_\varkappa-1}}{1 \quad 2 \quad\; \varrho_1-1\; \varrho_1\, \varrho_1+1 \quad\; \varrho_2-1\; \varrho_2 \quad\; \varrho_\varkappa-1}; \binom{0}{\varrho_\varkappa} \vee \binom{1}{\varrho_\varkappa} \vee \cdots \vee \binom{r_\varkappa - 1}{\varrho_\varkappa}\Bigg).$$

Setzt man

$$A_k\left(\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_{\varrho_1-1} & j_1 & \lambda_{\varrho_1+1} & \dots & \lambda_{\varrho_2-1} & j_2 & \dots & \lambda_{\varrho_\varkappa-1}\\ 1 & 2 & & \varrho_1-1 & \varrho_1 & \varrho_1+1 & & \varrho_2-1 & \varrho_2 & & \varrho_\varkappa-1\end{pmatrix}\right) = Q(\lambda_\alpha, j_i),$$

so erhält man

$$A_k\begin{pmatrix}r_1 & r_2 & \dots & r_\varkappa\\ \varrho_1 & \varrho_2 & & \varrho_\varkappa\end{pmatrix} = A_k\begin{pmatrix}r_1 & r_2 & \dots & r_{\varkappa-1}\\ \varrho_1 & \varrho_2 & & \varrho_{\varkappa-1}\end{pmatrix} - \sum_{\lambda_\alpha=0}^{t_\alpha}\sum_{j_i=r_i}^{i} \mathfrak{A}Q(\lambda_\varkappa, j_i)\left(\begin{pmatrix}0\\ \varrho_\varkappa\end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix}1\\ \varrho_\varkappa\end{pmatrix} \vee \dots \vee \begin{pmatrix}r_\varkappa-1\\ \varrho_\varkappa\end{pmatrix}\right)$$

$$= A_k\begin{pmatrix}r_1 & r_2 & \dots & r_{\varkappa-1}\\ \varrho_1 & \varrho_2 & & \varrho_{\varkappa-1}\end{pmatrix} - \sum_{\lambda_\alpha=0}^{t_\alpha}\sum_{j_i=r_i}^{t_i}\{Q(\lambda_\alpha, j_i)\sum_{\mu=0}^{r_\varkappa-1} w_{\varrho_\varkappa}^{(\mu)}\}$$

$$\leqq A_k\begin{pmatrix}r_1 & r_2 & \dots & r_{\varkappa-1}\\ \varrho_2 & \varrho_1 & & \varrho_{\varkappa-1}\end{pmatrix} - \sum_{\lambda_\alpha=0}^{t_\alpha}\sum_{j_i=r_i}^{t_i} Q(\lambda_\alpha, j_i)\sum_{\mu=0}^{r_\varkappa-1} w_{\varrho_\varkappa}^{(\mu)}.$$

Nun ist aber offensichtlich

$$A_k\begin{pmatrix}r_1 & r_2 & \dots & r_{\varkappa-1}\\ \varrho_1 & \varrho_2 & & \varrho_{\varkappa-1}\end{pmatrix} = \sum_{\substack{\lambda_\alpha=0\\ \alpha\neq\varrho_\nu\\ 1\leqq\alpha\leqq\varrho_\varkappa-1}}^{t_\alpha}\ \sum_{\substack{j_i=r_i\\ i=1,2,\dots,\varkappa-1}}^{t_i} Q(\lambda_\alpha, j_i).$$

Also folgt

$$A_k\begin{pmatrix}r_1 & r_2 & \dots & r_\varkappa\\ \varrho_1 & \varrho_2 & & \varrho_\varkappa\end{pmatrix} \leqq A_k\begin{pmatrix}r_1 & r_2 & \dots & r_{\varkappa-1}\\ \varrho_1 & \varrho_2 & & \varrho_{\varkappa-1}\end{pmatrix} - A_k\begin{pmatrix}r_1 & r_2 & \dots & r_{\varkappa-1}\\ \varrho_1 & \varrho_2 & & \varrho_{\varkappa-1}\end{pmatrix}\sum_{\mu=0}^{r_\varkappa-1} w_{\varrho_\varkappa}^{(\mu)}$$

$$= A_k\begin{pmatrix}r_1 & r_2 & \dots & r_{\varkappa-1}\\ \varrho_1 & \varrho_2 & & \varrho_{\varkappa-1}\end{pmatrix} \overline{w}_{\varrho_\varkappa}^{(v_\varkappa)}.$$

Somit ist Hilfssatz 3 bewiesen.

Satz 3, Hilfssatz 1 und Hilfssatz 3 ergeben zusammen unmittelbar, da die $\overline{w}_i^{(1)}$ nur so gewählt zu werden brauchen, daß $\sum_i \overline{w}_i^{(1)}$ konvergiert, den

Satz 5. *Die Axiome I—IV sind widerspruchsfrei.*

Die Bemerkung am Schluß von § 2 lehrt ferner, daß die Axiome I—IV nicht $\sum_{r=0}^{t_i} w_i^{(r)} = 1$ für alle i erfordern.

§ 4. Das Axiom der mathematischen Hoffnung.

Definition 6. *Eine Reihe mit konstanten reellen Summanden heißt „einwertig", wenn durch sie bei jeder Umordnung der Summanden derselbe Wert definiert wird. Dieser darf eine endliche Konstante oder auch $+\infty$ oder auch $-\infty$ sein.*

Folgerung. Jede einwertige Reihe ist entweder absolut konvergent, oder die Teilreihe der Glieder, die ev. das dem Vorzeichen des endgültigen Wertes entgegengesetzte Vorzeichen haben, ist konvergent.

Definition 7. *Zwei Produkte von endlich oder unendlich vielen Symbolen verschiedener Zeilen „schließen sich gegenseitig aus", wenn sie mindestens durch ein Symbol in verschiedener Potenz genau teilbar sind.*

Axiom V. $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3, \dots$

sei eine Folge beliebiger sich paarweise ausschließender endlicher Symbolprodukte, denen durch Axiom I die Werte

$$w^{(\mathfrak{C}_1)}, w^{(\mathfrak{C}_2)}, w^{(\mathfrak{C}_3)}, \dots$$

zugeordnet seien.

Es sei ferner

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$$

eine nur durch die Bedingung beschränkte Folge reeller Zahlen, daß

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu w^{(\mathfrak{C}_\nu)}$$

einwertig ist.

Dann soll immer gelten

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu R_k((\mathfrak{C}_\nu)) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu w^{(\mathfrak{C}_\nu)}.^{8})$$

Der Zweck dieses Axioms ist klar. Offensichtlich gestattet es, auch Fragen, wie das Petersburger Problem eine ist, eindeutig zu beantworten. Ferner dient es zum Beweis des Bayesschen Theorems in allgemeinster Form.

Die Forderung der Einwertigkeit ist naturgemäß und unvermeidlich, wenn man die mathematische Hoffnung nicht von der Numerierung der Symbolprodukte abhängig und dadurch sinnlos machen will.

Satz 6. *Aus Axiom VI folgt* $\sum_{r=0}^{t_i} w_i^{(r)} = 1$ *für alle* i.

Beweis. Man wähle $\mathfrak{C}_\nu = e_i^{(\nu-1)}$, $\alpha_\nu = 1$; dann ist

$$1 = \lim_{k\to\infty} \sum_{r=0}^{\infty} R_k\left(\binom{r}{i}\right) = \sum_{r=0}^{\infty} w_i^{(r)}.$$

Zu diesem Ergebnis ist zu bemerken, daß es die Versuche, in der Theorie der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten die Forderung $\sum_{r=0}^{\infty} w_i^{(r)} = 1$ nicht zu stellen, als ziemlich aussichtslos erkennen läßt. Man müßte denn gewillt sein, Axiom V fallen zu lassen, ohne das aber eine brauchbare Theorie der mathematischen Hoffnung kaum zu erzielen ist. Man könnte dann schon sehr einfache Fragen nicht mehr beantworten, z. B. jede Frage nach einer mathematischen Hoffnung, die sich aus unendlich vielen, sich gegenseitig ausschließenden Fällen zusammensetzt.

Hilfsdefinition 2. *Eine Belegung heißt „doppelt beschränkt", wenn sie folgenden Bedingungen genügt:*

1) *Es gelten die Axiome I, II.*
2) *Ist* $\overline{w}^{(\mathfrak{C}_\nu)}$ *die Dichte der durch ein Symbolprodukt* $\mathfrak{C}_\nu$ *teilbaren Spalten, so existiert eine Zahl* K, *so daß für alle* $\mathfrak{C}_\nu$ *gilt*
$$R_k(\mathfrak{C}_\nu) \leqq K\, \overline{w}^{(\mathfrak{C}_\nu)}.$$
3) *Für alle* i *ist die obere Grenze* Ω_i *der Quotienten*
$$\overline{w}_i^{(r+1)} : \overline{w}_i^{(r)} \text{ kleiner als eins}; \quad r = 0, 1, \ldots, t_i.$$
4) $\sum_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ *konvergiert.*

Hilfssatz 4. *In jeder doppelt beschränkten Belegung ist Axiom V erfüllt.*

Beweis. Aus 3) und 4) folgt die Existenz einer Konstanten C, so daß gilt

$$C \prod_{i=1}^{\infty} (1 - \Omega_i) \geqq 1.$$

Daher gilt a fortiori für ein Produkt über beliebige Indizes i

---

[8]) Die Ausdehnung des Axioms auf unendliche Symbolprodukte ist zwar widerspruchsfrei, zieht aber eine Einschränkung der möglichen Zahlenwerte der Einzelsymboldichten nach sich und ist deshalb unzulässig. Hat z. B. jede Spalte einer den Axiomen I—V genügenden Belegung nach Satz 4 die Dichte null, so ist der Grenzwert der Summe der relativen Häufigkeiten aller auftretenden einander ausschließenden Spalten eins, während er bei Verallgemeinerung des Axioms null sein müßte.

$$C \prod_i \left(1 - \frac{\overline{w}_i^{(r_i+1)}}{\overline{w}_i^{(r_i)}}\right) \geqq 1,$$

oder

$$C \prod_i (\overline{w}_i^{(r_i)} - \overline{w}_i^{(r_i+1)}) = C \prod_i w_i^{(r_i)} \geqq \prod_i \overline{w}_i^{(r_i)}.$$

Daher gilt für beliebiges $\mathfrak{C}_\nu$

$$\overline{w}^{(\mathfrak{C}_\nu)} \leqq C\, w^{(\mathfrak{C}_\nu)}.$$

Da es nach 2) eine Konstante K gibt, so daß immer gilt

$$R_k(\mathfrak{C}_\nu) \leqq K\, \overline{w}^{(\mathfrak{C}_\nu)},$$

und da trivialerweise gilt

$$R_k((\mathfrak{C}_\nu)) \leqq R_k(\mathfrak{C}_\nu),$$

so folgt für alle $\mathfrak{C}_\nu$

$$R_k((\mathfrak{C}_\nu)) \leqq CK w^{(\mathfrak{C}_\nu)}.$$

Diese Ungleichung sollte zunächst hergeleitet werden. Zur Fortführung des Beweises wird Hilfssatz 2 verwandt.

Man setzt

$$a_k^{(n)} = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu R_k((\mathfrak{C}_\nu)).$$

Dann existiert:

1) $\lim_{k\to\infty} a_k^{(n)}$ nach Axiom I,

2) $\lim_{n\to\infty} a_k^{(n)}$, da bis zur k-ten Spalte höchstens k der sich paarweise ausschließenden $\mathfrak{C}_\nu$ auftreten können.

Wenn nun $\lim_{n\to\infty} a_k^{(n)}$ gleichmäßig in k ist, so folgt aus der Konvergenz (falls diese besteht) von $\Sigma \alpha_\nu w^{(\mathfrak{C}_\nu)}$ die Existenz von $\lim_{k\to\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu R_k((\mathfrak{C}_\nu))$ und die Gleichheit beider Werte.

Es werde also zunächst angenommen, daß $\Sigma \alpha_\nu w^{(\mathfrak{C}_\nu)}$ konvergiert. Es ist dann

$$\left|\sum_{\lambda=1}^{\infty} \alpha_\nu R_k((\mathfrak{C}_\nu)) - \sum_{r=1}^{n} \alpha_\nu R_k((\mathfrak{C}_\nu))\right| = \left|\sum_{\lambda=1}^{\infty} \alpha_{n+\lambda} R_k((\mathfrak{C}_{n+\lambda}))\right|.$$

Nach der eben bewiesenen Ungleichung folgt

$$\left|\sum_{\lambda=1}^{\infty} \alpha_{n+\lambda} R_k((\mathfrak{C}_{n+\lambda}))\right| \leqq C\, K \sum_{\lambda=1}^{\infty} |\alpha_{n+\lambda}|\, w^{(\mathfrak{C}_{n+\lambda})}.$$

Der Einwertigkeit wegen folgt aber aus der Konvergenz von $\Sigma \alpha_\nu w^{(\mathfrak{C}_\nu)}$ auch die absolute Konvergenz und daraus wieder, daß durch hinreichend hohe Wahl von n $\sum_{\lambda=1}^{\infty} |\alpha_{n+\lambda}|\, w^{(\mathfrak{C}_{n+\lambda})}$ unter jedes ε gedrückt werden kann, daß also $\lim_{n\to\infty} a_k^{(n)}$ gleichmäßig in k ist. Hiermit ist Hilfssatz 4 für den Fall bewiesen, daß $\Sigma \alpha_\nu w^{(\mathfrak{C}_\nu)}$ konvergiert.

Es sei nun diese Summe divergent. Dann muß die Teilsumme aller der Glieder, die ev. das dem endgültigen entgegengesetzte Vorzeichen haben, konvergieren. Nach dem eben Bewiesenen muß aber der ihr in $\Sigma \alpha_\nu R_k((\mathfrak{C}_\nu))$ entsprechende Teil mit wachsendem k gegen denselben Wert konvergieren. Diese beiden sich entsprechenden Teile können demnach als belanglos ausgeschieden werden, und es bleibt die Frage, ob $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu w^{(\mathfrak{C}_\nu)}$, wo die α_ν alle dasselbe Vorzeichen haben, divergieren kann, während $\lim_{k\to\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu R_k((\mathfrak{C}_\nu))$

existiert. Das ist aber unmöglich, da immer gilt

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} |\alpha_\nu| R_k((\mathfrak{C}_\nu)) \leqq \lim_{k\to\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_\nu| R_k((\mathfrak{C}_\nu)),$$

und da durch hinreichend große Wahl von n die linke Seite, der Divergenz von $\Sigma|\alpha_\nu| w^{(\mathfrak{C}_\nu)}$ wegen, beliebig groß gemacht werden kann.

Hiermit ist Hilfssatz 4 bewiesen.

Satz 7. *Die Axiome I—V sind widerspruchsfrei.*

Beweis. Es genügt eine Belegung anzugeben, die allen Axiomen genügt. Man wähle z. B.

$$w_i^{(r)} = \omega_i^r - \omega_i^{r+1}, 0 < \omega_i < 1, \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i \text{ konvergent}$$

und stelle eine Belegung F mit Hilfe des Konstruktionsverfahrens, das im Beweise von Satz 3, § 2 angegeben ist, her. Dann sind wegen Hilfssatz 3 die Voraussetzungen der Hilfssätze 1 und 4 erfüllt; also genügt dieser Hilfssätze wegen die Belegung F allen Axiomen.

Hiermit ist die Existenz der Gebilde gesichert, die im Rahmen der vorliegenden Axiomatik einzig und allein Gegenstände wahrscheinlichkeitstheoretischer Untersuchungen sein können. Dementsprechend definieren wir:

Definition 8. *Eine Belegung, die den Axiomen I—V genügt, heißt „unabhängiges Wahrscheinlichkeitsfeld“ (u. W.-F.)* [9]).

Definition 9. *In einem u. W.-F. heißt die Dichte $w_i^{(r)}$ „die Wahrscheinlichkeit dafür, daß im i-ten Versuch das Ergebnis $e_i^{(r)}$ eintritt“.*

Von dieser Definition ausgehend, lassen sich alle Sätze der W.-R. als Sätze über W.-F.'s aussprechen und umgekehrt.

§ 5. Die Operationen der Auswahl und Mischung.

In diesem Paragraphen soll gezeigt werden, daß die von Herrn v. Mises [10]) für seine „Kollektive“ aufgestellten Grundoperationen der Auswahl und Mischung dem Sinne nach in jedem u. W.-F. anwendbar sind.

Der Grundgedanke der Operationen der Auswahl und Mischung scheint mir zur Erhöhung des intuitiven Verständnisses des Begriffs „u. W.-F.“ sehr wertvoll. Ich übernehme die beiden Bezeichnungen, muß jedoch hervorheben, daß formal Herr v. Mises darunter etwas ganz anderes versteht, nämlich auf Grund seines Kollektivbegriffes, gegen dessen Widerspruchsfreiheit ich Bedenken habe. [11]) Jedoch glaube ich, den eigentlichen Sinn der v. Misesschen Operationen mit dem folgenden zu treffen.

---

[9]) Diese Definition deckt sich nicht mit der in der in Anmerkung 1 genannten Arbeit gegebenen!

[10]) *v. Mises*, Grundlagen der W.-R., Math. Zeitschr. **5** (1918). *v. Mises*, Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit (Wien 1928). *Du Pasquier*, Calcul des probalités (Paris 1925); Chap. VIII gibt eine französische Darstellung der v. Misesschen Theorie.

[11]) Auf sie bin ich in § 1 der in Amerkung 1 genannten Arbeit eingegangen. Auf Wunsch von Herrn v. Mises bemerke ich, daß das dort angegebene Beispiel ohne sein Wissen von mir veröffentlicht worden ist, und zwar nach seiner Auffassung in mißverständlicher Form; es war mir von Herrn v. Mises privat zur Belegung einer speziellen von mir dort angegriffenen Ansicht mitgeteilt worden. Trotzdem ich nicht glaube, daß sich beweiskräftigere Beispiele für die dort genannte Ansicht beibringen lassen, möchte ich, um Mißverständnisse aufzuklären, betonen, daß meine dortige Kritik nicht etwa die großen Verdienste von Herrn v. Mises um die W.-R. leugnen wollte, sondern daß sie nur deshalb so eingehend war, weil mir seine Arbeiten der einzige prinzipiell wichtige Versuch einer Grundlegung der W.-R. zu sein scheinen.

Definition 10. *Werden in einem u. W.-F. F endlich oder unendlich viele Zeilen beliebig gestrichen, mit der Einschränkung, daß unendlich viele zurückbleiben, und werden die restlichen Zeilen wieder fortlaufend numeriert, so sagen wir, diese neue Belegung F' sei aus F durch „Auswahl" gebildet.*

Satz 8. *Durch jede Auswahl geht aus F wieder ein u. W.-F. F' hervor.*

Beweis. Es ist zu zeigen, daß in F' alle Axiome gelten. Dies ist für die Axiome I, II ohne weiteres klar. Daß auch Axiom V gilt, folgt sofort daraus, daß jede Folge von sich paarweise ausschließenden Symbolprodukten in F' a fortiori auch Folge sich paarweise ausschließender Symbolprodukte in F ist.

Für die Borelschen Axiome sieht man, daß aus jedem Selektiv Φ' in F' durch Einfügung der in den einzelnen Spalten gestrichenen Symbole ein Selektiv Φ aus F entsteht. Daß nämlich die Forderungen 2), 3) der Selektivdefinition für Φ in F gelten, leuchtet ein, da jeder Spalte S_l' aus F' die Spalte S_l aus F zugeordnet ist. Die Zahlen $N(\Theta, p)$ in Forderung 1) findet man ferner sofort als $N(\Theta, p) = N(\Theta', p')$, wo $p' = p - \pi$ ist, unter π die Anzahl der gestrichenen Zeilen bis zur p-ten inkl. verstanden, und wo Θ' aus Θ eindeutig durch Streichung der Symbole hervorgeht, die den gestrichenen Zeilen angehören. Das so entstandene Φ ist demnach Selektiv in F. Da nun jedem S_l das durch Streichung entstandene S_l' entspricht, ist ferner

$$R_k(\varphi_n) = R_n(\varphi_n') \text{ und } R_k(\varphi_\infty) = R_k(\varphi_\infty').$$

Da für Φ die Borelschen Axiome gelten, folgt dasselbe unmittelbar für Φ'.

Hiermit ist Satz 8 bewiesen.

Der Sinn des Satzes wird besonders anschaulich, wenn man an die dauernde Wiederholung desselben Glücksspiels denkt. Der Satz drückt dann aus, daß es aussichtslos ist, nach einem auf Auswahl basierten System zu spielen; er gibt also in Herrn v. Mises Worten „*das Prinzip vom ausgeschlossenen Spielsystem*" wieder.

Definition 11. *Man sagt, eine Belegung F' entsteht aus einem u. W.-F. F durch „Mischung", wenn in beliebigen f_i (s. S. 47) Systeme von je endlich oder unendlich vielen Symbolen durch je ein neues Symbol ersetzt und diese neuen Symbole in F auf die Plätze der ausgeschiedenen Symbole statt dieser gelegt werden.*

Satz 9. *Durch jede Mischung entsteht aus F wieder ein u. W.-F. F', und die Wahrscheinlichkeiten der Symbole in F' sind die Summen der Einzelwahrscheinlichkeiten der Symbole derjenigen Systeme, für die sie eingesetzt sind.*

Beweis. Die letzte Behauptung und die Gültigkeit der Axiome I, II für F' folgt so: Es seien

$$\varepsilon_{i_1}^{(r_1)}, \varepsilon_{i_2}^{(r_2)}, \ldots, \varepsilon_{i_\lambda}^{(r_\lambda)}, \; i_\varrho \neq i_\sigma \text{ für } \varrho \neq \sigma$$

λ der neuen Symbole, die die Symbole $(e_{i_\varrho}^{(\nu_\varrho)})$ der Systeme Γ_{i_ϱ}, $\varrho = 1, 2, \ldots, \lambda$ ersetzen. Für F' gilt dann

$$R_k'\left((\varepsilon_{i_1}^{r_1}\, \varepsilon_{i_2}^{r_2} \cdots \varepsilon_{i_\lambda}^{r_\lambda})\right) = \sum_{\substack{\nu_\varrho \\ \varrho=1,2,\cdots,\lambda}} R_k\left((e_{i_1}^{\nu_1}\, e_{i_2}^{\nu_2} \cdots e_{i_\lambda}^{\nu_\lambda})\right),$$

wo die ν_ϱ unabhängig voneinander die Exponenten aller Symbole der Systeme Γ_{i_ϱ} durchlaufen. Aus Axiom V folgt daher

$$\lim_{k\to\infty} R_k'\left((\varepsilon_{i_1}^{r_1} \cdots \varepsilon_{i_\lambda}^{r_\lambda})\right) = \sum_{\nu_\varrho} w_{i_1}^{(\nu_1)}\, w_{i_2}^{(\nu_2)} \cdots w_{i_\lambda}^{(\nu_\lambda)} = \prod_{\varrho=1}^{\lambda} \sum_{\nu_\varrho} w_{i_\varrho}^{(\nu_\varrho)}.$$

Entsprechend zeigt man die Gültigkeit von V in F'.

Es bleibt also nur noch die Gültigkeit der Borelschen Axiome in F' nachzuweisen. Ist Φ' ein Selektiv aus F', so betrachtet man das Φ aus F, das aus Φ' entsteht,

wenn S_l' durch die ursprüngliche Spalte S_l ersetzt wird. Φ genügt dann offensichtlich der Forderungen 2), 3) für Selektive. Es genügt aber auch der Forderung 1), wenn $N(\Theta, p) = N(\Theta', p)$ gewählt wird, wo die Symbolfolge Θ' für F' aus Θ eindeutig entsteht, wenn man in der letzteren alle die Symbole, die von der Systembildung betroffen sind, durch die zugehörigen neuen ersetzt. Φ ist also Selektiv in F. Die weiteren Schlüsse stimmen wörtlich mit denen für den Beweis des Auswahlsatzes überein.

Es sei noch bemerkt, daß auch Aussagen über das Grenzverhalten der relativen Häufigkeiten in den einzelnen Spalten, also den Versuchsreihen, unter gewissen Bedingungen möglich sind. Ein einfaches Beispiel dieser Art läßt sich mit Hilfe folgender Definition angeben.

Definition 12. *Ein u. W.-F. heißt „homogen", wenn in ihm in jedem Versuch die möglichen Ereignisse und ihre Wahrscheinlichkeiten dieselben sind.*

Dann gilt z. B.

Satz 10. *Bezeichnet* $\mathsf{P}_i^{(k)}((e^{(r)}))$ *die relative Häufigkeit des Auftretens von* $e^{(r)}$ *in der festen Spalte* S_k *eines homogenen W.-F.s bis zur i-ten Zeile inkl., so ist für jedes vorgegebene* $\varepsilon > 0$ *die Dichte der Zahlen k gleich eins, für die sich sowohl*

$$\overline{\lim_{i\to\infty}}\, \mathsf{P}_i^{(k)}((e^{(r)})) \quad \textit{als auch} \quad \underline{\lim_{i\to\infty}}\, \mathsf{P}_i^{(k)}((e^{(r)}))$$

von $w^{(r)}$ *um weniger als* ε *absolut genommen unterscheidet.*

(Die Zeilenindizes bleiben an den e und w homogener W.-F.s naturgemäß fort.)

Der Beweis soll hier nur angedeutet werden, da ich Fragen dieser Art in einer selbständigen Arbeit zu behandeln beabsichtige, da diese Fragen eine gewisse Bedeutung haben. Der Beweis von Satz 10 selbst läuft mit ganz einfachen Abänderungen parallel zu einem von Herrn Borel [12]) gegebenen Beweis.

Die Bedeutung von Satz 10 und ähnlicher allgemeiner Ergebnisse ist folgende:

Wofern man als plausibles Postulat der experimentellen Naturwissenschaft die Annahme voranstellt, daß Versuchsreihen in der Erfahrung nicht vorkommen, die einer vorgegebenen Menge angehören, der in Bezug auf das W.-F. die Dichte null zukommt, läßt sich schon aus einer einzigen Versuchsreihe entscheiden, ob das vorgegebene Experimentalverfahren ein homogenes W.-F. liefert.

§ 6. Die abhängigen Wahrscheinlichkeiten.

Definition 13. *Eine Belegung F, die den Axiomen I, III, IV, V genügt, heißt „abhängiges Wahrscheinlichkeitsfeld" (a. W.-F.).*

Definition 14. *Ist*

$$\lim_{k\to\infty} R_k\left(\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_{i-1} \\ 1 & 2 & & i-1 \end{pmatrix}\right) \neq 0,$$

so heißt der nach Axiom I dann sicher existierende Grenzwert

$${}^{(r_1 r_2 \cdots r_{i-1})}w_i^{(r_i)} = \lim_{k\to\infty} \frac{A_k\left(\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_{i-1} & r_i \\ 1 & 2 & & i-1 & i \end{pmatrix}\right)}{A_k\left(\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_{i-1} \\ 1 & 2 & & i-1 \end{pmatrix}\right)}$$

die „Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses $e_i^{(r_i)}$ *unter der Voraussetzung, daß* $e_1^{(r_1)}, e_2^{(r_2)}, \ldots, e_{i-1}^{(r_{i-1})}$ *eingetreten sind".*

Es ist kaum noch nötig, zu bemerken, daß die durch I geforderten Grenzwerte

[12]) Traité du Calcul des Probabilités (Paris 1926), t. II, fasc. 1, p. 2 ff.

nicht etwa diese abhängigen Wahrscheinlichkeiten selbst sind, sondern nur Durchschnittswerte, probabilités globales in der Terminologie Herrn Borels. Satz 6, § 4 sagt jetzt nicht etwa auch, daß

$$\sum_{r_\lambda=0}^{t_\lambda} {}^{(r_1 r_2 \cdots r_{\lambda_1})} w_\lambda^{(r_\lambda)} = 1$$

ist, sondern nur, daß gilt

$$\sum_{r_\lambda=0}^{t_\lambda} w_\lambda^{(r_\lambda)} = 1,$$

wo die $w_\lambda^{(r_\lambda)}$ probalités globales sind. Eine einfache Rechnung, die nur die bekannten Grenzwertsätze benutzt, lehrt jedoch, daß unter der Voraussetzung

$\lim_{k\to\infty} R_k\left(\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_{\lambda-1} \\ 1 & 2 & & \lambda-1 \end{pmatrix}\right) \neq 0$ auch jetzt gilt

$$\sum_{r_\lambda=0}^{t_\lambda} {}^{(r_1 r_2 \cdots r_{\lambda-1})} w^{(r_\lambda)} = 1 .$$

Aus der Definition 13 erkennt man, daß der Begriff des a. W.-F. eine Verallgemeinerung des Begriffes des u. W.-F. ist. Die Zweckmäßigkeit der Verallgemeinerung und die Tatsache, daß sie dem intuitiven Begriff von Abhängigkeit entspricht, zeigen die folgenden Überlegungen.

Definition 15. *Das Ergebnis $e_i^{(r)}$ des i-ten Versuchs heißt „unabhängig von allen möglichen Ergebnissen der vorhergehenden Versuche", wenn für $0 \leqq r_j \leqq t_j$, $j = 1, 2, \ldots, i-1$ immer gilt*

$$^{(r_1 r_2 \cdots r_{i-1})} w^{(r_i)} = C_i^{(r_i)} \quad \text{oder} \quad \lim_{k\to\infty} R_k\left(\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_{i-1} \\ 1 & 2 & & i-1 \end{pmatrix}\right) = 0.$$

Satz 11. *Ist in einem a. W.-F. $e_i^{(r)}$ für alle i und r von den vorhergehenden Versuchsergebnissen unabhängig, so ist das a. W.-F. ein u. W.-F.*

Beweis. Aus Definition 15 folgt

$$\lim_{k\to\infty} R_k\left(\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_{i-1} & r_i \\ 1 & 2 & & i-1 & i \end{pmatrix}\right) = C_i^{(r_i)} \lim_{k\to\infty} R_k\left(\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_{i-1} \\ 1 & 2 & & i-1 \end{pmatrix}\right).$$

Hieraus folgt unter Verwendung von Axiom V

$$\lim_{\substack{k\to\infty \\ j=1,2,\ldots,i-1}} \sum_{r_j=0}^{t_j} R_k\left(\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_{i-1} & r_i \\ 1 & 2 & & i-1 & i \end{pmatrix}\right) = C_i^{(ri)} \lim_{k\to\infty} \sum_{r_j=0}^{t_j} R_k\left(\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_{i-1} \\ 1 & 2 & & i-1 \end{pmatrix}\right),$$

also

$$\lim_{k\to\infty} R_k\left(\begin{pmatrix} r_i \\ i \end{pmatrix}\right) = C_i^{(r_i)},$$

oder

$$\lim_{k\to\infty} R_k\left(\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_{i-1} & r_i \\ 1 & 2 & & i-1 & i \end{pmatrix}\right) = \lim_{k\to\infty} R_k\left(\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_{i-1} \\ 1 & 2 & & i-1 \end{pmatrix}\right) \lim_{k\to\infty} R_k\left(\begin{pmatrix} r_i \\ i \end{pmatrix}\right).$$

Hiermit ist durch vollständige Induktion bewiesen

$$\lim_{k\to\infty} R_k\left(\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_\lambda \\ 1 & 2 & & \lambda \end{pmatrix}\right) = \prod_{\nu=1}^{\lambda} \lim_{k\to\infty} R_k\left(\begin{pmatrix} r_\nu \\ \nu \end{pmatrix}\right).$$

Satz 1, § 2 in Verbindung mit Satz 6, § 4 ergibt also die Gültigkeit von Axiom II, womit Satz 11 bewiesen ist.

Man sieht also, daß das a. W. F. tatsächlich eine sachgemäße Erweiterung ist, weil gerade die zusätzliche Forderung der Unabhängigkeit aller Ergebnisse es wieder zu einem u. W.-F. einschränkt.

Es muß bemerkt werden, daß dieser Begriff der abhängigen Wahrscheinlichkeiten etwas weiter ist, als der übliche. Man versteht sonst unter der Wahrscheinlichkeit von $e_\lambda^{(r_\lambda)}$ unter der Voraussetzung, daß $e_1^{(r_1)}, e_2^{(r_2)}, \ldots, e_{\lambda-1}^{(r_{\lambda-1})}$ schon eingetreten sind, dem Sinne nach immer den Wert

$$\lim_{k\to\infty} \frac{A_k\left(\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \ldots & r_\lambda \\ 1 & 2 & & \lambda \end{pmatrix}\right)}{A_k\left(\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \ldots & r_{\lambda-1} \\ 1 & 2 & & \lambda-1 \end{pmatrix}\right)}.$$

Dieser existiert jedoch auf Grund von Axiom I nur dann mit Sicherheit, wenn gilt

$$\lim_{k\to\infty} R_k\left(\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \ldots & r_{\lambda-1} \\ 1 & 2 & & \lambda-1 \end{pmatrix}\right) \neq 0.$$

Im entgegengesetzten Falle ist seine Existenz durch die bisherigen Axiome nicht gesichert.

Es scheint mir sehr möglich, daß spätere feinere Anwendungen der W. R. besonders auf zahlentheoretische Fragen, die Hinzunahme eines Axioms, das die Existenz von ${}^{(r_1 r_2 \cdots r_{\lambda-1})}w_\lambda^{(r_\lambda)}$ auch in diesem Falle fordert, nötig machen wird. Dann wäre natürlich die entsprechende Forderung auch in die Theorie der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten aufzunehmen, um den sinngemäßen durch Satz 11 aufgewiesenen Zusammenhang zwischen beiden Theorien nicht zu zerstören [13]). Hier soll jedoch auf die Einführung solcher Axiome, für die bisher kein Bedarf vorliegt, verzichtet werden, und es mit dem Hinweis genug sein, daß ihrer Einführung keinerlei Schwierigkeit im Wege steht.

Daß die Axiome der abhängigen Wahrscheinlichkeiten widerspruchsfrei sind, ist, da sie ein Teilsystem der Axiome der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten sind, a fortiori klar.

Unverändert gültig bleiben die Betrachtungen von § 5, wenn man sich nur die Wahrscheinlichkeiten dort durch probabilités globales ersetzt denkt.

Es sei noch auf die beiden einzigen mir wichtig scheinenden prinzipiellen Fragen, die ich offen lassen mußte, hingewiesen.

Die erste ist: Gibt es, wenn die $w_i^{(r)}$ beliebig vorgegeben sind — mit der durch V bedingten Einschränkung $\sum_{r=0}^{t_i} w_i^{(r)} = 1$ — immer u. W.-F.'s mit genau diesen Dichten? Diese Frage dürfte selbstverständlich zu bejahen sein, und ich möchte sogar glauben, daß die durch das Konstruktionsverfahren in § 2 mit diesen Dichten hergestellten Belegungen solche u. W.-F.'s sind. Der Beweis ist mir jedoch nur in den oben formulierten Spezialfällen gelungen.

Die zweite prinzipielle Frage ist die entsprechende für a. W.-F.'s. Auch sie dürfte zu bejahen sein.

Als letzte in diesem Zusammenhang zwar nicht unentbehrliche, aber für zahlentheoretische Anwendungen der Theorie überaus wichtige Frage möchte ich die folgende nennen. Wählt man als Symbol im i-ten Versuch alle Potenzen der i-ten Primzahl und bildet eine Belegung durch die Vorschrift, daß auf den Platz (k, i) die genaue Potenz

---

[13]) Eine solche Formulierung habe ich für einen Vortrag auf der Prager Tagung 1929, Zeitschr. für angew. Math. u. Mechanik **9** (1930), gewählt.

von p_i geschrieben wird, die in k aufgeht, so genügt diese Belegung offenbar den Axiomen I, II. Genügt sie auch den übrigen, d. h. ist diese Belegung ein u. W.-F.? Die entsprechende Frage, wenn als Symbole im i-ten Versuch alle genauen Potenzen von p_i^ν ($\nu > 1$) gewählt werden, ist durch die Hilfssätze 1, 4 bejahend beantwortet.

Schlußbemerkungen.

Hingewiesen sei noch auf eine andere Ausdeutungsmöglichkeit des W.-F.'s. Man kann es als Bild einer einzigen Wahlfolge auffassen, die sich vor jedem Versuch mit allen ihren Möglichkeiten repräsentiert, wobei die Dichten in den Zeilen die verschiedenen Bewertungen dieser Möglichkeiten, also die Wahrscheinlichkeiten, veranschaulichen. Dieses Bild aber legt sofort noch ein anderes nahe. Man kann an Stelle der aus abzählbar vielen Spalten bestehenden hier behandelten W.-F.'s auch solche mit einem linearen Kontinuum von Spalten betrachten und zwei Fälle unterscheiden, je nachdem die Länge des Kontinuums endlich oder unendlich ist. Die gegebenen Axiome übertragen sich sofort, wenn man allgemein $R_k((\mathfrak{C}))$ durch $R_\varkappa((\mathfrak{C}))$, den Quotienten des Inhaltes der bis zum Punkt $\varkappa$ genau durch $\mathfrak{C}$ teilbaren Spalten geteilt durch $\varkappa$ ersetzt.

Die Beweise werden teilweise dann sogar einfacher. Hierdurch werden auch die von Herrn Borel behandelten Fragen, Ziffernverteilung in Dezimal- und Kettenbrüchen betreffend [14]), von den gegebenen Axiomen mit erfaßt.

[14]) Traité du Calcul des Probabilités, t. II, fasc. 1.

Eingegangen 17. Mai 1929.

Existence theorems on the numbers of representations of odd integers as sums of $4t+2$ squares.

By *E. T. Bell* in Pasadena (California, U. S. A.).

1. Introduction. To give the problem of this paper its proper setting, and to fix the notation, we first recall three theorems due to Eisenstein.

Let m denote an odd integer > 0; if restrictions be imposed upon m, as for example $m \equiv 3 \bmod 4$, they will be explicitly stated. Denote by $\xi_r(n)$ the excess of the sum of the rth powers of all those divisors of the integer $n > 0$ that are $\equiv 1 \bmod 4$ over the like sum for the divisors $\equiv 3 \bmod 4$, and let $N(n, r)$ denote the number of representations of n as a sum of r squares, both the arrangement of the squares and the signs of their square roots being relevant in counting the representations. The theorems in question are [1])

(A) *If* $m \equiv 1 \bmod 4$, *then*
$N(m, 2) = 4\,\xi_0(m)$; $N(m, 6) = 12\,\xi_2(m)$.

(B) *If* $m \equiv 3 \bmod 4$, *then*
$N(m, 2) = 0$; $N(m, 6) = -20\,\xi_2(m)$; $N(m, 10) = -12\,\xi_4(m)$.

(C) *If* $m \equiv 1 \bmod 4$, *then there is no theorem for* $N(m, 10)$ *similar to the last of* (B).

Proofs for (C) and the last of (B) were first published, apparently, by G. Humbert in 1907, who proved an assertion of Liouville from which both follow [2]).

We shall prove (A), (B), (C) incidentally, by a uniform method which establishes all three simultaneously, while discussing our main problem, which is the following.

It is suggested by (A) that for some integer $r > 1$, and m an arbitrary integer $\equiv 1 \bmod 4$, $N(m, 4r+2)$ is of the form $c\xi_{2r}(m)$, where c is independent of m. Similarly (B) suggests that for m an arbitrary integer $\equiv 3 \bmod 4$, and for some integer $r > 2$, $N(m, 4r+2)$ is of the form $c\xi_{2r}(m)$, where c is independent of m.

We shall prove that *no such integers r exist*; *that is, the two sequences of theorems* (A), (B) *close with Eisenstein's for* 10 *squares.*

The two theorems from which this conclusion is inferred are rather abstruse, at least in appearance. They are

Theorem α. *If* $N(m, 4r+2)$, *where* m *is an arbitrary integer* $\equiv 1 \bmod 4$, *and* r *is an integer* > 2, *is of the form* $c\,\xi_{2r}(m)$, *where* c *is independent of* m, *it is necessary* (*but not sufficient*) *that*

$$15(5^{2r+1} - 1) = 512r^4 - 256r^3 - 32r^2 + 136r.$$

Theorem β. *If* $N(m, 4r+2)$, *where* m *is an arbitrary integer* $\equiv 3 \bmod 4$, *and* r *is an integer* > 2, *is of the form* $c\xi_{2r}(m)$, *where* c *is independent of* m, *it is necessary* (*but not sufficient*) *that* $105(7^{2r} - 1) = (512r^4 - 1280r^3 + 1120r^2 + 440r - 162)(3^{2r} - 1)$.

[1]) *Eisenstein*, Crelle's Journal **35** (1847), 135.

[2]) See *Dickson's* History of the Theory of Numbers **2**, 315—6.

The corresponding necessary and sufficient conditions are also obtained. They are much more stringent, but the above necessary conditions are easily seen to be decisive against the continuance of the sequences of theorems (A), (B).

The method of proof, which is new, is analytic to the extent that the necessity and sufficiency of the conditions are equivalent to the theorem that a certain analytic function of u, regular at the origin, has a power series expansion in u which necessarily is unique. The series can, however, be obtained by two distinct algorithms. Comparison of the resulting forms of the coefficients, together with the essential uniqueness of the expansion, obviously implies the required necessity and sufficiency. We proceed to obtain this series.

2. Expansions. In Jacobi's notation for elliptic functions, when $|u|$, $|k|$ are suitably restricted, we have

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{cn} u = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r u^{2r}}{(2r)!} C_{2r}(k^2),$$

where k is the modulus of $\operatorname{cn} u$, and

$$\text{(2)} \qquad C_0(k^2) = 1, \quad C_{2r}(k^2) = \sum_{t=0}^{r-1} c_t(r)\, k^{2t} \qquad (r > 0),$$

in which, as is well known or readily proved, the $c_t(r)$ $(t = 0, 1, \ldots, r-1)$ are integers > 0 for all integers $r > 0$. But the unique power series (1) can also be obtained otherwise than by the Maclaurin expansion of $\operatorname{cn} u$. For we have

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{cn} u = \frac{2\pi}{kK} \sum\nolimits_m \left[\frac{q^{\frac{m}{2}}}{1+q^m} \cos \frac{m\pi u}{2K} \right],$$

the summation Σ_m refering to all odd integers $m > 0$. Expanding the cosines in (3) as power series in u, we get

$$\operatorname{cn} u = \frac{2\pi}{kK} \sum\nolimits_m \left[\frac{q^{\frac{m}{2}}}{1+q^m} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r u^{2r}}{(2r)!} \left(\frac{m\pi}{2K} \right)^{2r} \right];$$

hence, on comparison with (2), we have

$$\text{(4)} \qquad \frac{2\pi}{kK} \sum\nolimits_m \frac{m^{2r} q^{\frac{m}{2}}}{1+q^m} \left(\frac{\pi}{2K} \right)^{2r} = C_{2r}(k^2),$$

valid for all integers $r \geqq 0$. In particular, by the first of (2), we have,

$$\text{(5)} \qquad \frac{2\pi}{kK} \sum\nolimits_m \frac{q^{\frac{m}{2}}}{1+q^m} = 1.$$

Introduce the Legendre-Jacobi symbol $(-1|m) \equiv (-1)^{(m-1)/2}$. Then, from (4), (2) we get

$$\text{(6)} \qquad 4 \Sigma q^{\frac{m}{2}} (-1|m)\, \xi_{2r}(m) = \sum_{t=0}^{r-1} c_t(r)\, \vartheta_2^{4t+2} \vartheta_3^{4r-4t} \qquad (r > 0),$$

on expanding Σ_m as a power series in q, $|q| < 1$, and using

$$\text{(7)} \qquad \frac{2K}{\pi} = \vartheta_3^2, \quad k = \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}.$$

From (5), (7) the first results in § 1 (A), (B) follow at once.

From (4), (6) and the uniqueness of the expansion (1), we have the following:

Theorem γ. *There is precisely one set of integers* $c_t(r) > 0$ $(t = 0, 1, \ldots, r-1)$ *such that the function*

$$4\Sigma_m q^{\frac{m}{2}} (-1|m)\, \xi_{2r}(m), \quad |q| < 1, \quad m = 1, 3, 5, \ldots,$$

is reducible to the finite form

$$\sum_{t=0}^{r-1} c_t(r)\, \vartheta_2^{4t+2}\, \vartheta_3^{4r-4t}.$$

Apply now to (6) the following identities from the transformation of the second order of the thetas,

$$\vartheta_2^2(\sqrt{q}) = 2\vartheta_2\, \vartheta_3, \quad \vartheta_3^2(\sqrt{q}) = \vartheta_2^2 + \vartheta_3^2.$$

A simple reduction gives

$$(8) \qquad 4\Sigma q^{\frac{m}{4}} (-1|m)\, \xi_{2r}(m) = \sum_{\mu=0}^{2r} \left[\sum_{t=0}^{\mu} 2^{2t+1} c_t(r) \binom{2r-2t}{\mu-t} \right] \vartheta_2^{2\mu+1}\, \vartheta_3^{4r-2\mu+1},$$

in which $\binom{p}{s}$ is the coefficient of x^s in $(1+x)^p$, and by convention $\binom{0}{s} = 0$. By the manner in which (8) has been obtained, we see from (8) and Theorem γ the following

Theorem δ. *For all integers* $r > 0$ *there is precisely one set of integers* $\gamma_\mu(r) > 0$ $(\mu = 0, 1, \ldots, 2r)$ *such that the function*

$$2\Sigma_m q^{\frac{m}{4}} (-1|m)\, \xi_{2r}(m), \quad |q| < 1,$$

is reducible to the finite form

$$\sum_{\mu=0}^{2r} \gamma_\mu(r)\, \vartheta_2^{2\mu+1}\, \vartheta_3^{4r-2\mu+1}.$$

The integers $\gamma_\mu(r)$ *are given by,* $\left[\binom{x}{s} = 0, \quad x \leqq 0\right]$,

$$(9) \qquad \gamma_\mu(r) \equiv \sum_{t=0}^{\mu} 2^{2t} c_t(r) \binom{2r-2t}{\mu-t} \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, 2r).$$

The unique expansion and reduction thus found separates into two, when we remark that a sum of s odd squares is $\equiv s \bmod 4$. The expansion is now

$$(10) \qquad 2\Sigma q^{\frac{m}{4}} (-1|m)\, \xi_{2r}(m) = \sum_{\mu=0}^{2r} \gamma_\mu(r)\, \vartheta_2^{2\mu+1}\, \vartheta_3^{4r-2\mu+1} \qquad (r > 0).$$

Only those terms of (10) for which μ is even contribute to the coefficient of $q^{\frac{m}{4}}$ when $m \equiv 1 \bmod 4$; only those in which μ is odd contribute when $m \equiv 3 \bmod 4$. Hence we have

Theorem ε. *For all integers* $r > 0$ *there is precisely one set of integers* $\gamma_{2\mu}(r) > 0$ $(\mu = 0, 1, \ldots, r)$ *such that, for* $|q| < 1$,

$$(11) \qquad 2\Sigma_m q^{\frac{m}{4}} (-1|m)\, \xi_{2r}(m) = \sum_{\mu=0}^{r} \gamma_{2\mu}(r)\, \vartheta_2^{4\mu+1}\, \vartheta_2^{4r+1-4\mu},$$

where Σ_m *refers to all positive integers* $m \equiv 1$ *mod* 4, *and there is also precisely one set of integers* $\gamma_{2\mu+1}(r) > 0$ $(\mu = 0, 1, \ldots, r-1)$ *such that*

$$(12) \qquad 2\Sigma_m q^{\frac{m}{4}} (-1|m)\, \xi_{2r}(m) = \sum_{\mu=0}^{r-1} \gamma_{2\mu+1}(r)\, \vartheta_2^{4\mu+3}\, \vartheta_3^{4r-4\mu-1},$$

where Σ_m *refers to all positive integers* $m \equiv 3$ *mod* 4. *The integers* $\gamma_\mu(r)$ *are given by* (9).

3. Representations as sums of $4r+2$ squares, $r>0$. Denote by $M(n, j, h)$ the number of representations of n as a sum of j squares with roots $\gtreqless 0$, precisely h of which are odd and occupy the first h places in the representations. Let $N(n, j, h)$ denote the similarly defined function with the modification that the positions of the h odd squares are unrestricted. Then, obviously,

$$N(n, j, h) = \binom{j}{h} M(n, j, h); \tag{13}$$

and if a, b are integers > 0,

$$\vartheta_2^a \vartheta_3^b = \Sigma_n \, q^{\frac{n}{4}} \, M(n, a+b, a), \tag{14}$$

where Σ_n refers to all integers $n \geqq a$ such that $n \equiv a \bmod 4$. Combining (11), (12), (13), (14), and comparing coefficients of like powers of q in the results, we find the following

Theorem ζ. *For every integer $r>0$ there is precisely one set of rational numbers $g_{2\mu}(r) > 0$ $(\mu = 0, 1, \ldots, r)$ such that, for m an arbitrary positive integer $\equiv 1$ mod 4,*

$$2(-1\,|\,m)\,\xi_{2r}(m) = \sum_{\mu=0}^{r} g_{2\mu}(r)\, N(m, 4r+2, 4\mu+1); \tag{15}$$

there is also precisely one set of rational numbers $g_{2\mu+1}(r) > 0$ $(\mu = 0, 1, \ldots, r-1)$ such that, for m an arbitrary positive integer $\equiv 3$ mod 4,

$$2(-1\,|\,m)\,\xi_{2r}(m) = \sum_{\mu=0}^{r-1} g_{2\mu+1}(r)\, N(m, 4r+2, 4\mu+3); \tag{16}$$

the rational numbers in question are

$$g_{2\mu}(r) = \frac{(4\mu+1)!\,(4r+1-4\mu)!}{(4r+2)!}\,\gamma_{2\mu}(r) \quad (\mu = 0, 1, \ldots, r), \tag{17}$$

$$g_{2\mu+1}(r) = \frac{(4\mu+3)!\,(4r-1-4\mu)!}{(4r+2)!}\,\gamma_{2\mu+1}(r) \quad (\mu = 0, 1, \ldots, r-1), \tag{18}$$

where the γ's are as in (9).

Consider now all the $N(m, 4r+2)$ representations of m as a sum of $4r+2$ squares. If $m \equiv 1 \bmod 4$, the representations fall into exactly $r+1$ mutually exclusive sets, according as the number of odd squares in the representations is precisely 1, or precisely $5, \ldots,$ or precisely $4r+1$. Hence

$$N(m, 4r+2) = \sum_{\mu=0}^{r} N(m, 4r+2, 4\mu+1) \qquad (r \geqq 0). \tag{19}$$

Similarly, if $m \equiv 3 \bmod 4$,

$$N(m, 4r+2) = \sum_{\mu=0}^{r-1} N(m, 4r+2, 4\mu+3) \qquad (r > 0). \tag{20}$$

Compare (15), (17), (19). Then we have

Theorem η. *If $m \equiv 1$ mod 4, and $r>0$, the necessary and sufficient condition that $N(m, 4r+2)$ shall be of the form $c\xi_{2r}(m)$, where c is independent of m, is that there shall exist a constant λ (independent of m), such that*

$$\frac{(4\mu+1)!\,(4r+1-4\mu)!}{(4r+2)!}\,\gamma_{2\mu}(r) = \lambda \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, r). \tag{21}$$

If such a constant exists, then

$$N(m, 4r+2) = \frac{2}{\lambda}\,\xi_{2r}(m). \tag{22}$$

Similarly, from (16), (18), (19) we find

Theorem θ. *If* $m \equiv 3 \bmod 4$, *and* $r > 0$, *the necessary and sufficient condition that* $N(m, 4r+2)$ *shall be of the form* $c\xi_{2r}(m)$, *where* c *is independent of* m, *is that a constant* λ *shall exist such that*

$$\frac{(4\mu+3)!\,(4r-4\mu-1)!}{(4r+2)!}\,\gamma_{2\mu+1}(r) = \lambda \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, r-1). \tag{23}$$

If such a constant exists, then

$$N(m, 4r+2) = -\frac{2}{\lambda}\,\xi_{2r}(m). \tag{24}$$

We shall next prove the following, which complete the foregoing.

Theorem ι. *If* $r > 0$, $m \equiv 1 \bmod 4$, *and if the conditions* (21) *are satisfied, then*

$$N(m, 4r+2) = (8r+4)\,\xi_{2r}(m). \tag{22. 1}$$

In the above we may obviously replace $r > 0$ by $r \geqq 0$.

Theorem $\varkappa$. *If* $r > 0$, $m \equiv 3 \bmod 4$, *and if the conditions* (23) *are satisfied, then*

$$N(m, 4r+2) = -\frac{32r(2r+1)\,(4r+1)}{3(3^{2r}-1)}\,\xi_{2r}(m). \tag{24. 1}$$

To prove these it is clearly sufficient to calculate the values of λ obtained by taking $\mu = 0$ in (21), (23). For the first we find

$$\lambda = \frac{(4r+1)!}{(4r+2)!}\,c_0(r)\binom{2r}{0};$$

and for the second,

$$\lambda = \frac{3!\,(4r-1)!}{(4r+2)!}\left[c_0(r)\binom{2r}{1} + 2^2\,c_1(r)\binom{2r-2}{0}\right].$$

But $c_0(r) = 1$, since cn u degenerates to cos u when the modulus $k = 0$. As will be seen presently, the value of $c_1(r)$ is given by

$$16\,c_1(r) = 3^{2r} - 8r - 1. \tag{25}$$

From these, (22.1), (24.1) follow at once.

Returning for a moment to § 1 (A), (B), we note that the case $r = 0$ was disposed off in (5). The remaining statements in (A), (B) are verified immediately on taking $r = 1$ in (22.1), (24.1), and $r = 2$ in (24.1). For these values it is readily calculated that the necessary and sufficient conditions stated are satisfied; the requisite constants $c_t(r)$ of § 1 (2) for these cases are $c_0(1) = c_0(2) = 1$, $c_1(2) = 4$. Similarly § 1 (C) is proved; (21) is violated when $r = 2$.

4. Impossibility of further theorems of types § 1 (A), (B). It must be shown that (21, (23) are false when $r > 2$. Since all of the conditions (21), (23) are necessary in the respective cases (A), (B), the requisite impossibility will be established if it can be shown that the values of the left of (21) when $\mu = 0, 1$ are unequal, and similarly for (23). For this we shall need

$$\begin{aligned}
c_0(r) &= 1,\ c_1(r) \text{ as in (25), and}\\
256\,c_2(r) &= 5^{2r} - 8(r-1)3^{2r} + 32r^2 - 48r - 9,\\
4096\,c_3(r) &= 7^{2r} - 8(r-2)5^{2r} + (32r^2 - 120r + 82)3^{2r}\\
&\quad - \frac{1}{3}(256r^3 - 1248r^2 + 1280r + 297).
\end{aligned}$$

The values of $c_j(r)$ $(j = 0, 1, 2, 3)$ were stated without proof by Hermite [3]; that for $c_3(r)$ being incorrect (the coefficients -1248, 1280 are given as -288, 320 in his result). For the above correct forms, I am indebted to Dr. J. D. Elder, who calculated them by the method of O. Gruder [4].

As they check the tabulated expansions to the limits of the tables in the standard treatises, they may be taken as exact.

Proceeding with (21), (23) as just outlined, and inserting the above values of the $c_j(r)$, we find the Theorems α, β stated in § 1. The reductions are all straightforward; the somewhat tedious calculation for Theorem β was performed independently by two computers.

From α, β the required impossibility follows without difficulty. Thus, for Theorem α, it obviously will be sufficient to show that

$$3 \cdot 5^{2r+1} > 512r^4 + 136r + 15,$$

for all integers $r > 2$. Divide throughout by 15, and replace the fractional coefficients thus introduced on the right by the respective nearest integers in excess of the fractions. Then it is sufficient to show that

$$5^{2r} > 35r^4 + 10r + 1$$

for all integers $r > 2$. Dividing throughout by 5, and repeating the argument, we see that it is sufficient to show that

$$5^{2r-1} > 7r^4 + 2r + 1,$$

for all integers $r > 2$. But this is obvious.

In a similar manner, by an equally simple but rather longer discussion, Theorem β disposes off the case $m \equiv 3 \bmod 4$.

[3]) Oeuvres **3**, 237.

[4]) Wiener Sitzungsberichte **116**, IIa, (1917).

Eingegangen 30. April 1929.